Mines Maths MPSI 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Vidick (ENS Ulm) ; il a été relu par Thomas Chomette (Professeur en CPGE) et David Lecomte (Université de Stanford).

Cette épreuve est composée de deux problèmes indépendants, chacun découpé en trois parties. Les domaines abordés sont très variés, allant de l'algèbre linéaire à l'intégration et à la géométrie. On trace en particulier plusieurs courbes, définies d'abord par une équation de la forme $y = f(x)$, puis par une équation paramétrique, puis par une équation du type $\mathrm{F}(x, y) = 0$. Dans l'ensemble, les questions ne présentent pas de grosses difficultés, et plusieurs d'entre elles consistent en une application directe du cours.

Mise à part la partie B du deuxième problème, qui reprend des notations de la partie A, les six parties de ce sujet sont indépendantes et peuvent donc être traitées dans un ordre quelconque. Une même thématique réunit cependant les trois parties de chaque problème.

- Les trois parties du premier problème sont indépendantes les unes des autres. Dans la première, on étudie la fonction $f : t \mapsto e^{-t}\cos t$. On trace sa courbe représentative, puis on calcule l'aire du plan délimitée par cette courbe et l'axe des abcisses en introduisant une suite d'intégrales. Dans la deuxième partie, on étudie une courbe paramétrée et on la représente après en avoir donné une équation simple en coordonnées polaires. Dans la troisième partie, on étudie un sous-ensemble F de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, et on montre que, muni de la composition des endomorphismes, F est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

- Les deux premières parties du deuxième problème sont consacrées à l'étude de l'endomorphisme $f : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \times \mathrm{A} - \mathrm{A} \times \mathrm{M}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, où A est une matrice fixée. Dans la première partie on montre que le noyau de f est un anneau. Dans la deuxième, on étudie un cas particulier, et on calcule les puissances n-ièmes de certaines matrices avant de résoudre une équation matricielle. Dans la troisième partie, indépendante des deux premières, on étudie une symétrie du plan, et on représente l'image du cercle unité par cette symétrie.

Indications

Premier problème

3 Montrer que f n'admet pas de limite en $-\infty$ en considérant deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendant vers $-\infty$ et telles que $\big(f(u_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(v_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ont des limites différentes.

4 Le coefficient directeur de la tangente à (C) en $(t, f(t))$ est $f'(t)$.

9 s_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.

12 Écrire $\overrightarrow{\mathrm{V}(t)}$ sous la forme $\overrightarrow{\mathrm{V}(t)} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \begin{pmatrix} \cos(t+\theta) \\ \sin(t+\theta) \end{pmatrix}$.

13 Remarquer que $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}) = t$.

16 Montrer que $\mathrm{F}_t \circ \mathrm{F}_{t'} = \mathrm{F}_{t+t'}$ en effectuant un produit matriciel.

Deuxième problème

3 Remarquer que $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}\, f$.

5 Utiliser l'associativité du produit matriciel.

6 Montrer que c'est un sous-anneau de M_2 en rassemblant les résultats des questions précédentes.

8.a Procéder par double inclusion, et utiliser les questions 4 et 7.

8.b Montrer que la famille (I, A) est libre.

9 Calculer les premières puissances de A.

10 Utiliser le binôme de Newton.

11 Exprimer N, puis N^2, en tant que combinaison linéaire de I et de A.

14 Exprimer les coordonnées de $m \in \Gamma$ en fonction de celles de $m' = s(m)$.

15 Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{I}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{J}}$ en fonction de $\overrightarrow{\imath}$ et de $\overrightarrow{\jmath}$. Pour cela, un dessin peut être utile.

Premier problème

Partie A

1 Calculons la fonction dérivée de f :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f'(t) = -e^{-t}\cos t + e^{-t}(-\sin t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

Pour étudier le signe de la dérivée, cherchons ses points d'annulation : soit t dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Alors

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\iff \cos t + \sin t = 0 \\ &\iff \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ f'(t) = 0 &\iff t \in \left\{-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

> Toute expression de la forme $a\cos x + b\sin x$, où a et b sont des réels, peut se mettre sous la forme $\gamma\cos(x-\varphi)$, ce qui permet d'en étudier facilement le signe et les zéros. En effet,
>
> $$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
>
> satisfont $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, ce qui prouve qu'il existe un unique $\varphi \in [\,0\,;2\pi\,[$ tel que
>
> $$\alpha = \cos\varphi \qquad \text{et} \qquad \beta = \sin\varphi$$
>
> D'où
> $$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}(\alpha\cos x + \beta\sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\,\cos x + \sin\varphi\,\sin x) \\ a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi) \end{aligned}$$
>
> En posant $\gamma = \sqrt{a^2+b^2}$, on a bien la forme annoncée.

Pour avoir le signe de f' sur chaque intervalle, on prend des valeurs particulières :

$$f'\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = e^{\pi/2} > 0 \qquad f'\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = -e^{-\pi/2} < 0 \qquad \text{et} \qquad f'\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = e^{-3\pi/2} > 0$$

D'où le tableau de variations de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$:

t	$-\dfrac{\pi}{2}$		$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{3\pi}{4}$		$\dfrac{3\pi}{2}$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-3\pi/4}$	$\nearrow$	0

2 Soient k un entier relatif et $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2} \,;\, \dfrac{3\pi}{2} \right]$. On a

$$f(t+2k\pi) = e^{-t-2k\pi}\cos(t+2k\pi)$$

$$\boxed{f(t+2k\pi) = e^{-2k\pi} f(t)}$$

Or $e^{-2k\pi}$ est un réel strictement positif ; comme multiplier une fonction par une constante positive ne change pas son sens de variations, les variations de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \,;\, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \right]$ sont les mêmes que sur $\left[-\dfrac{\pi}{2} \,;\, \dfrac{3\pi}{2} \right]$.

> On peut remarquer que $f(\pi/2) = 0$ et donc, d'après le tableau de variations établi à la question précédente, f est positive sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$ et négative sur $[\pi/2\,;3\pi/2]$. Comme pour tout réel t et tout entier relatif k, $f(t+2k\pi) = e^{-2k\pi} f(t)$, on en déduit que f est positive sur tout intervalle de la forme $[-\pi/2+2k\pi\,;\pi/2+2k\pi]$ et négative sur tout intervalle de la forme $[-\pi/2+(2k+1)\pi\,;\pi/2+(2k+1)\pi]$.

3 Soit M un point du plan de coordonnées (x, y). Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in (\mathrm{C}) \cap (\mathrm{C}_1) &\iff \begin{cases} y = e^{-x} \\ y = e^{-x}\cos x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = e^{-x} \\ \cos x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc M appartient à $(\mathrm{C}) \cap (\mathrm{C}_1)$ si et seulement si x est de la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $y = e^{-x}$. Les points d'intersection de (C) et de (C_1) sont donc les points :

$$\boxed{(\mathrm{C}) \cap (\mathrm{C}_1) = \left\{ (2k\pi, e^{-2k\pi}) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in (\mathrm{C}) \cap (\mathrm{C}_2) &\iff \begin{cases} y = -e^{-x} \\ y = e^{-x}\cos x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -e^{-x} \\ \cos x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

donc M appartient à $(\mathrm{C}) \cap (\mathrm{C}_2)$ si et seulement si x est de la forme $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $y = -e^{-x}$. Les points d'intersection de (C) et de (C_2) sont donc les points :

$$\boxed{(\mathrm{C}) \cap (\mathrm{C}_2) = \left\{ \left((2k+1)\pi, -e^{-(2k+1)\pi} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Supposons que f admette une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $-\infty$. Alors, si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels tendant vers $-\infty$, la suite $(f(u_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ tend vers ℓ.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite $(-2k\pi)_{k\in\mathbb{N}}$. Cette suite tend vers $-\infty$ lorsque k tend vers l'infini. D'après ce qui précède, pour tout entier k, $f(-2k\pi) = e^{2k\pi}$ et donc la suite $(f(-2k\pi))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. De même, en considérant la suite $(-(2k+1)\pi)_{k\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$, on constate que $(f(-(2k+1)\pi))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$. Donc on a à la fois $\ell = -\infty$ et $\ell = +\infty$, ce qui est absurde.

$$\boxed{f \text{ n'admet pas de limite en } -\infty.}$$