X/ENS Maths PSI 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Dudas (ENS Ulm) ; il a été relu par Julien Lévy (ENS Ulm) et Vincent Perrier (ENS Cachan).

Ce sujet étudie le comportement des solutions d'un système différentiel linéaire générique du premier ordre à coefficients constants vis-à-vis du terme source (ou second membre) de ce système. Le problème comporte trois parties à traiter dans l'ordre. Néanmoins, comme certains résultats sont donnés, il est possible de bien avancer dans le problème sans avoir résolu toutes les questions.

- En guise de préliminaire, la première partie introduit l'exponentielle de matrice, afin de résoudre explicitement les systèmes différentiels linéaires non homogènes du premier ordre à coefficients constants. C'est une partie classique qu'il convient de traiter soigneusement.
- La deuxième partie étudie les effets du second membre sur les valeurs accessibles par les solutions d'un système d'équations du premier ordre. La difficulté des questions est très hétérogène. Il s'agit de la plus longue des trois parties.
- Enfin, dans la dernière partie, qui comporte quelques questions particulièrement techniques, on étudie les équations pour lesquelles on peut contrôler le second membre pour que les solutions soient asymptotiquement stables : ces équations sont dites « stabilisables ».

Il s'agit d'un sujet complet qui utilise une grande partie des ressources d'algèbre et d'analyse du programme ; il illustre remarquablement bien la puissance des outils de l'algèbre linéaire (en particulier la théorie de la réduction des endomorphismes) pour l'étude des systèmes différentiels linéaires.

Indications

1 Considérer par exemple un multiple convenable de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou utiliser une norme subordonnée à la norme de $\mathbb{C}^n$ définie dans l'énoncé.

2.a Comment peut-on majorer $|||\mathrm{A}^k|||$?

2.b Valider le critère de Cauchy.

4.a Montrer que chacune des composantes de Φ est une série entière de rayon infini et en déduire la régularité de Φ.

4.b Montrer, selon le même raisonnement qu'à la question 2.c, que $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ et $\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}$ commutent pour tous réels s et t.

5 Il suffit de vérifier la propriété sur une base convenable.

7 Utiliser la question 4.b.

8.a Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton pour trouver un polynôme annulateur de degré n. En déduire que la famille $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{n-1})$ engendre un espace stable par multiplication par A.

8.b En validant un théorème d'échange série-intégrale, montrer que x_T est limite d'une suite d'éléments de Im C.

9.a Appliquer la formule de la question 7 avec un contrôle u bien choisi.

9.b Reconnaître dans l'intégrale la norme d'une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$. Montrer ensuite qu'elle est nulle et calculer ses dérivées en 0.

9.c Que peut-on dire de $(\mathrm{E}^\perp)^\perp$, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

10.a Revenir à la définition du rang d'une matrice.

11.a Utiliser la formule démontrée à la question 7.

11.b Suivre le raisonnement de la question 9.b.

12.b Utiliser la formule démontrée à la question 7.

12.c Développer les deux expressions et calculer séparément les intégrales obtenues.

12.d Développer puis intégrer l'égalité $\|v(s)\|^2 = \|v(s) - u(s) + u(s)\|^2$ en utilisant la question précédente.

13.b Chercher X sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

13.c Calculer la matrice C associée à la paire (A, B).

14 Utiliser la question 5.

15 Résoudre l'équation.

16 Calculer la matrice D associée à la paire $(\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}})$.

17.a Utiliser la question 10.a.

17.b Déterminer la matrice de la famille $(f_n, \ldots, f_1)$ dans la base formée des vecteurs $(b, \mathrm{A}\,b, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}\,b)$ et montrer qu'elle est inversible.

17.c Comment se représentent les matrices A et B dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$?

17.d Calculer le polynôme caractéristique de $\widetilde{\mathrm{A}}$.

18 Trouver $\widetilde{\mathrm{K}}$ telle que les conditions de la question 5 soient vérifiées.

I. Exponentielles de matrices

1 Définissons la norme subordonnée à une norme de $\mathbb{C}^n$, par exemple celle définie dans l'énoncé. Pour cela regardons, pour M une matrice carrée de taille n la fonction h_{M} définie par :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \qquad h_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \frac{\|\mathrm{M\,X}\|}{\|\mathrm{X}\|}$$

C'est une fonction rationnelle donc continue sur son ensemble de définition. D'après le théorème de Heine, l'image de tout compact par cette fonction est un compact ; en particulier, h_{M} atteint sa borne supérieure sur la sphère unité

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathrm{X}\| = 1\}$$

Si cette borne est atteinte au point X_0 on note

$$|||\mathrm{M}||| = \max_{\mathrm{X}\in\mathbb{S}^{n-1}} h_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \max_{\mathrm{X}\in\mathbb{S}^{n-1}} \|\mathrm{M\,X}\| = \|\mathrm{M\,X}_0\|$$

Cependant, si X est un vecteur quelconque non nul, $\mathrm{X}/\|\mathrm{X}\|$ appartient à $\mathbb{S}^{n-1}$ et vérifie donc

$$h_{\mathrm{M}}\left(\frac{\mathrm{X}}{\|\mathrm{X}\|}\right) \leqslant |||\mathrm{M}|||$$

c'est-à-dire
$$\left\|\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{X}}{\|\mathrm{X}\|}\right\| = \frac{1}{\|\mathrm{X}\|}\,\|\mathrm{M\,X}\| \leqslant |||\mathrm{M}|||$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\|\mathrm{X}\|$ on obtient la formule

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{C}^n \qquad \|\mathrm{M\,X}\| \leqslant |||\mathrm{M}|||\,\|\mathrm{X}\|$$

qui est aussi vérifiée pour le vecteur nul. Celle-ci prouve, par linéarité, que M est une fonction lipschitzienne de rapport $|||\mathrm{M}|||$. De plus, ce rapport est le plus petit possible, puisque l'égalité est vérifiée pour un certain $\mathrm{X}_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Si N est une autre matrice de taille n alors

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{C}^n \qquad \|(\mathrm{M\,N})\mathrm{X}\| = \|\mathrm{M}(\mathrm{N\,X})\| \leqslant |||\mathrm{M}|||\,\|\mathrm{N\,X}\| \leqslant |||\mathrm{M}|||\,|||\mathrm{N}|||\,\|\mathrm{X}\|$$

L'application $\mathrm{X} \longmapsto (\mathrm{M\,N})\mathrm{X}$ est donc une application lipschitzienne de rapport $|||\mathrm{M}|||\,|||\mathrm{N}|||$. Or, par définition de la norme subordonnée, $|||\mathrm{M\,N}|||$ est le plus petit rapport de Lipschitz de cette application, ce qui prouve que

$$\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad |||\mathrm{M\,N}||| \leqslant |||\mathrm{M}|||\,|||\mathrm{N}|||$$

Finalement, on a montré que

> La norme subordonnée $|||.|||$ à la norme définie dans l'énoncé est une norme matricielle.

> Donnons une autre réponse à cette question en construisant de manière effective une norme matricielle : considérons la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par
>
> $$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \|\mathrm{M}\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}|$$

Vérifions rapidement que c'est une norme :

- Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\|\lambda\, \mathrm{M}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda\, m_{ij}| = |\lambda| \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}| = |\lambda|\, \|\mathrm{M}\|_\infty$
- Si M et N sont deux matrices carrées de taille n,

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{M}+\mathrm{N}\|_\infty &= \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}+n_{ij}| \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} (|m_{ij}|+|n_{ij}|)\\
&\leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}| + \max_{1\leqslant k,l\leqslant n} |n_{kl}|\\
\|\mathrm{M}+\mathrm{N}\|_\infty &\leqslant \|\mathrm{M}\|_\infty + \|\mathrm{N}\|_\infty
\end{aligned}$$

- Si $\|\mathrm{M}\|_\infty = 0$, alors pour tout $(i,j) \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]^2$,

$$0 \leqslant\ |m_{ij}| \leqslant \|\mathrm{M}\|_\infty = 0$$

  ce qui force les m_{ij} à être tous nuls. Aussi M est-elle la matrice nulle.

C'est une des normes usuelles sur les matrices qui se comporte relativement bien vis-à-vis de la multiplication : si A et B sont deux matrices carrées de taille n, les coefficients de la matrice produit $\mathrm{C} = \mathrm{A}\,\mathrm{B}$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]^2 \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

de sorte que $\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]^2 \qquad \begin{aligned}|c_{ij}| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}\, b_{kj}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|\mathrm{A}\|_\infty\, \|\mathrm{B}\|_\infty\\ &\leqslant n\, \|\mathrm{A}\|_\infty\, \|\mathrm{B}\|_\infty\end{aligned}$

Définissons alors la norme suivante :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad |\!|\!|\mathrm{M}|\!|\!| = n\, \|\mathrm{M}\|_\infty = n \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |m_{ij}|$$

L'inégalité précédente entraîne

$$\begin{aligned}
|\!|\!|\mathrm{AB}|\!|\!| &= n \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{ij}| \leqslant n(n\, \|\mathrm{A}\|_\infty\, \|\mathrm{B}\|_\infty) \leqslant (n\, \|\mathrm{A}\|_\infty)(n\, \|\mathrm{B}\|_\infty)\\
&\leqslant |\!|\!|\mathrm{A}|\!|\!|\; |\!|\!|\mathrm{B}|\!|\!|
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{|\!|\!| \cdot |\!|\!| = n\, \|\cdot\|_\infty \text{ est une norme matricielle sur } \mathcal{M}(\mathbb{C}).}$

Rappelons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et qu'ainsi toutes les normes sont équivalentes. Ainsi, si $\mathbf{N}$ est une norme quelconque sur cet espace, il existe des constantes réelles positives k et K telles que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad k\, |\!|\!|\mathrm{M}|\!|\!| \leqslant\ \mathbf{N}(\mathrm{M})\ \leqslant\ \mathrm{K}\, |\!|\!|\mathrm{M}|\!|\!|$$

En multipliant cette norme par le nombre K/k^2, on obtient une nouvelle norme $\mathbf{N}'$ qui vérifie

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}'(\mathrm{AB}) = \frac{\mathrm{K}}{k^2}\, \mathbf{N}(\mathrm{AB}) &\leqslant \frac{\mathrm{K}^2}{k^2}\, |\!|\!|\mathrm{AB}|\!|\!| \leqslant \frac{\mathrm{K}^2}{k^2}\, |\!|\!|\mathrm{A}|\!|\!|\; |\!|\!|\mathrm{B}|\!|\!|\\
&\leqslant \frac{\mathrm{K}^2}{k^2}\, \frac{1}{k}\, \mathbf{N}(\mathrm{A})\, \frac{1}{k}\, \mathbf{N}(\mathrm{B}) \leqslant \frac{\mathrm{K}}{k^2}\, \mathbf{N}(\mathrm{A})\, \frac{\mathrm{K}}{k^2}\, \mathbf{N}(\mathrm{B}) \leqslant \mathbf{N}'(\mathrm{A})\, \mathbf{N}'(\mathrm{B})
\end{aligned}$$

pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui prouve que toute norme sur les matrices est proportionnelle à une norme matricielle.