Mines Maths 1 PSI 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Arnaud Durand (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Perrier (ENS Cachan) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Le sujet étudie le problème suivant, qui est un cas unidimensionnel du problème de transport de Monge : on souhaite déplacer chaque grain d'un tas de sable dont la densité linéique est $\mathrm{e}^{-u^2/2}$ de façon à obtenir un tas de densité linéique $f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ où f est une fonction positive donnée d'intégrale 1. Autrement dit, on désire que la masse du tas entre les abscisses u et $u+\mathrm{d}u$ passe de $\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ à $f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$. Lors du transport, les grains situés initialement à l'abscisse u sont déplacés vers une abscisse notée $s(u)$. Le coût du transport correspondant à l'application s est défini par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u-s(u)|^2\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \tag{$*$}$$

Le but du problème est de trouver une fonction s qui minimise ce coût de transport et de majorer ce coût minimal par une quantité ne nécessitant pas le calcul de l'application s minimisante.

- La première partie, très courte, propose d'établir quelques résultats préliminaires qui seront utilisés dans la suite.
- Dans la deuxième partie, on suppose que la fonction f intervenant dans la densité linéique d'arrivée est strictement positive. On prouve l'existence d'une fonction φ, dont on peut montrer (mais ce n'est pas proposé dans le sujet) qu'elle minimise le coût de transport défini par l'expression $(*)$.
- Le but de la troisième partie est de majorer le coût minimal réalisé par la fonction φ à l'aide d'une quantité ne dépendant pas de φ, à savoir l'entropie de Boltzmann de f, définie ici par

$$\mathrm{E}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\ln(f(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

Les questions sont, pour la plupart, plus techniques que vraiment difficiles. Elles demandent au candidat de faire preuve de rigueur et de précision dans sa rédaction, car il y a souvent beaucoup d'arguments à citer pour y répondre. La partie du programme principalement abordée est la théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Ce sujet est par conséquent une excellente façon de faire le point sur cette notion.

Indications

I. Préliminaires

1 Étudier les fonctions $t \mapsto t - \ln(1+t)$ et $t \mapsto t\,\ln t$.

II. Construction d'une application particulière

3 Montrer que F_f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée est strictement positive.

4 Trouver une relation fonctionnelle entre F_f, F_1 et φ.

6 Dériver la relation $\mathrm{F}_f \circ \varphi = \mathrm{F}_1$ et prendre le logarithme.

7 Effectuer le changement de variable $u = \varphi(v)$.

8 Observer que φ^2 est croissante au voisinage de $+\infty$.

9 Pour $x > 0$ assez grand, majorer par 1 l'intégrale intervenant dans la question 8. Pour $x < 0$, adapter le résultat de la question 8, puis procéder de même.

10 Dériver $u \mapsto (u - \varphi(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$.

III. Une inégalité intéressante

12 Concernant l'existence de $\mathrm{E}(f)$, majorer, pour $u \in \mathbb{R}$, $f(u)\,|\ln(f(u))|\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ en distinguant le cas où $f(u) > 1$ du cas contraire. Pour l'existence de $\Phi(f)$, utiliser le résultat de la question 9.

13 Utiliser le résultat de la question 7, avec $h\,:\,u \mapsto \ln(f(u))$.

14 Faire appel aux résultats des questions 13, 11 et 6 afin de transformer l'expression de l'intégrale égale à $\mathrm{E}(f) - \Phi(f)$.

15 Utiliser le résultat de la question 1.

16 Montrer que $\mathrm{E}(f) = \Phi(f)$ équivaut à $\varphi'(u) = 1$, pour tout réel u.

I. Préliminaires

1 Pour établir la première inégalité, introduisons la fonction

$$\alpha\colon \begin{cases}]\,-1\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \qquad\longmapsto t - \ln(1+t) \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $]\,-1\,;+\infty\,[$ (en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle) et

$$\forall t \in \,]\,-1\,;+\infty\,[\qquad \alpha'(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$$

Pour tout $t \in \,]\,-1\,;0\,]$, on a $\alpha'(t) \leqslant 0$ et, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, on a $\alpha'(t) \geqslant 0$. Par conséquent, la fonction α est décroissante sur l'intervalle $]\,-1\,;0\,]$ et croissante sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$. Résumons ceci dans un tableau de variations.

	-1		0		$+\infty$
α'	$\|$	$-$		$+$	
α	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que la fonction α admet pour minimum global le réel $\alpha(0) = 0$. On en déduit que pour tout t de l'intervalle $]\,-1\,;+\infty\,[$, $\alpha(t) \geqslant 0$, d'où

$$\boxed{\forall t \in \,]\,-1\,;\infty\,[\qquad \ln(1+t) \leqslant t} \qquad (\mathbf{1})$$

> Pour établir cette inégalité, on peut également utiliser le fait que la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave. Son graphe est situé en dessous de toutes ses tangentes, donc en particulier en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, ce qui fournit le résultat.

Pour mettre en évidence la seconde inégalité, posons

$$\beta\colon \begin{cases}]\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \qquad\longmapsto t\ln t \end{cases}$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ (en tant que produit de fonctions usuelles dérivables sur cet intervalle) et

$$\forall t \in \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \beta'(t) = \ln t + 1$$

Pour tout $t \in \left]\, 0\,; \mathrm{e}^{-1} \right]$, on a $\beta'(t) \leqslant 0$ et, pour tout $t \in \left[\, \mathrm{e}^{-1}\,; +\infty \right[$, on a $\beta'(t) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction β est décroissante sur l'intervalle $\left]\, 0\,; \mathrm{e}^{-1} \right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\, \mathrm{e}^{-1}\,; +\infty \right[$. Consignons ceci dans un tableau de variations.

	0		e^{-1}		$+\infty$
β'	‖	$-$		$+$	
β	‖ 0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

L'étude des variations de β montre que cette fonction admet pour minimum global le réel $\beta(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-1}$. Il en résulte que

$$\boxed{\forall t \in \left]\, 0\,; +\infty \right[\qquad t \ln t \geqslant -\frac{1}{\mathrm{e}}} \tag{2}$$

2 Une bijection ψ de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de I sur J si et seulement si, pour tout élément t de I,

$$\boxed{\psi'(t) \neq 0}$$

Dans ce cas, la dérivée de ψ^{-1} est donnée par

$$\left(\psi^{-1}\right)' = \frac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}}$$

> On dispose en fait du résultat plus général suivant : une fonction ψ de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 1$, sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de I sur son image $\mathrm{J} = \psi(\mathrm{I})$ si et seulement si, pour tout élément t de I, le réel $\psi'(t)$ est non nul. Si tel est le cas, on a soit $\psi'(t) > 0$, pour tout $t \in \mathrm{I}$, et le difféomorphisme ψ est strictement croissant, soit $\psi'(t) < 0$, pour tout $t \in \mathrm{I}$, et le difféomorphisme ψ est strictement décroissant.