Centrale Maths 2 PSI 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sattisvar Tandabany (ENS Lyon) ; il a été relu par Arnaud Durand (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème a pour objet l'étude des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne possédant pas de valeur propre réelle. Il fait intervenir la réduction des endomorphismes, les polynômes, mais aussi un peu d'arithmétique. L'énoncé se compose de trois parties (qui dépendent les unes des autres) précédées d'un ensemble de résultats préliminaires :

- Les quelques résultats préliminaires sont une bonne mise en jambe pas très difficile ; ils sont très utiles par la suite.
- La première partie aborde le cas particulier de la dimension 2. La plupart des résultats sont spécifiques à ce cas particulier mais constituent néanmoins des idées intéressantes pour le cas général. Cette partie permet également d'apprivoiser le comportement des matrices de similitudes (notées $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ dans le sujet), qui prennent de l'importance dans la suite du problème.
- La deuxième partie revient au cas général de la dimension n, mais traite de matrices possédant des polynômes annulateurs particuliers.
- La troisième partie se place dans le cas le plus général. Elle fait appel pour une large part aux résultats des deux parties précédentes, mais n'en nécessite pas moins d'astuce pour autant.

Le problème n'est pas très long, mais il contient quelques passages assez calculatoires. Il permet de bien progresser en algèbre linéaire.

Indications

Partie I

I.A.1.b Si l'on cherche s_2 une symétrie telle que $u = s_2 \circ s_1$ alors il suffit d'écrire $u \circ s_1 = s_2 \circ s_1 \circ s_1 = s_2$.

I.A.2.b Utiliser la décomposition en symétrie de $\mathrm{M}(0, 1)$.

I.A.3 Reconnaître la matrice d'une rotation.

I.A.4 Se ramener à la question précédente.

I.A.5.c Deux matrices semblables ont même déterminant.

I.A.5.d Utiliser la décomposition de $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$.

I.B.1 Utiliser la définition de l'énoncé pour les symétries.

I.B.2 S'inspirer de la matrice A des questions précédentes.

I.B.5.a Voir A comme une matrice par blocs.

Partie II

II.A.2 Interpréter E comme une matrice de changement de base.

II.A.3.a Raisonner par contraposée.

II.A.5 Procéder par récurrence.

II.B.1 Utiliser le lien entre les racines d'un polynôme annulateur et le spectre.

Partie III

III.A.2 Penser au produit de polynômes du type $(\mathrm{X} - \alpha)^2 + \beta^2$.

III.B.2 La matrice A' annule aussi P.

III.B.4 Factoriser P et utiliser le lemme des noyaux.

Résultats préliminaires

1.a Soit P un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. En particulier, en définissant les matrices P et Q par :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{R}_{i,j} = \mathrm{Re}\ \mathrm{P}_{i,j} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_{i,j} = \mathrm{Im}\ \mathrm{P}_{i,j}$$

on obtient directement P :

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{R} + \mathrm{iJ}}$$

1.b L'énoncé donne la relation suivante entre A, B et P :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1} &\iff \mathrm{AP} = \mathrm{PB} \\ &\iff \mathrm{A}(\mathrm{R} + \mathrm{iJ}) = (\mathrm{R} + \mathrm{iJ})\mathrm{B} \\ &\iff \mathrm{AR} + \mathrm{iAJ} = \mathrm{RB} + \mathrm{iJB} \end{aligned}$$

En se rappelant que les matrices A, B, R et J sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on peut séparer la partie réelle de la partie imaginaire.

$$\mathrm{AR} = \mathrm{RB} \quad \text{et} \quad \mathrm{AJ} = \mathrm{JB}$$

$$\forall t \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} \mathrm{A}(\mathrm{R} + t\mathrm{J}) &= \mathrm{AR} + t\mathrm{AJ} \\ &= \mathrm{RB} + t\mathrm{JB} \\ &= (\mathrm{R} + t\mathrm{J})\mathrm{B} \end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{A}(\mathrm{R} + t\mathrm{J}) = (\mathrm{R} + t\mathrm{J})\mathrm{B}}$$

1.c Considérons $\det(\mathrm{R} + \mathrm{XJ})$ comme un polynôme à coefficients réels. Il n'est pas nul car il ne s'annule pas en i puisque $\det(\mathrm{R} + \mathrm{iJ}) = \det \mathrm{P} \neq 0$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de racines et on peut choisir t_0 dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas racine. Donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(\mathrm{R} + t_0\mathrm{J}) \neq 0$.

1.d Fixons un t_0 comme défini dans la question précédente. Ainsi $\mathrm{R} + t_0\mathrm{J}$ est inversible car de déterminant non nul et d'après la question 1.b, on en déduit que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{A} = (\mathrm{R} + t_0\mathrm{J})\,\mathrm{B}\,(\mathrm{R} + t_0\mathrm{J})^{-1} \qquad \text{avec} \qquad (\mathrm{R} + t_0\mathrm{J}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

2.a Soient n un entier et P un polynôme à coefficients réels de degré $2n+1$. Regardons les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction qui à x associe $\mathrm{P}(x)$ (en supposant que le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient de son terme de plus haut degré, est positif) :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty \qquad \text{car P est de degré impair}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure que P admet une racine réelle. Dans le cas ou le coefficient dominant de P est négatif, les limites sont inversées mais le résultat en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires est le même.

2.b On rappelle ici que le spectre d'une matrice A est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{A} - \mathrm{XI})$ dont le degré est n.

S'il existe une matrice A de $\mathscr{M}_n$ qui ne possède pas de valeur propre réelle alors son polynôme caractéristique ne possède pas de racine réelle. Ainsi, en vertu de la question précédente, le degré du polynôme ne peut être impair.

Partie I

I.A.1.a Dans la base canonique, la matrice de s_1, symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}e_2$, est

$$\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

I.A.1.b La matrice de l'application $u \circ s_1$ vaut

$$\mathrm{M}(0,1) \times \mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Faisons appel à notre intuition. L'action de l'application $u \circ s_1$ sur e_1 se lit sur la première colonne de la matrice, tandis que l'action de l'application sur e_2 se lit sur la deuxième colonne de la matrice. L'application $u \circ s_1$ échange donc les vecteurs e_1 et e_2. Cela ressemble à la symétrie par rapport à la première bissectrice $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$. Vérifions :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u \circ s_1$ est bien la symétrie par rapport à $\mathbb{R}(e_1 + e_2)$ parallèlement à $\mathbb{R}(e_1 - e_2)$. Notons-la $s_2 = u \circ s_1$. Il vient alors

$$u \circ s_1 \circ s_1 = u \circ \mathrm{id} = u$$

donc

$$\boxed{u = s_2 \circ s_1}$$

I.A.2.a En dimension 2, le polynôme caractéristique d'une matrice A est

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{X} + \det(\mathrm{A})$$

De plus, deux matrices possédant le même polynôme caractéristique possèdent les mêmes valeurs propres. Si le polynôme caractéristique a des racines distinctes alors les deux matrices sont semblables dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et, par conséquent, d'après les résultats préliminaires 1.d, le sont aussi dans $\mathscr{M}_2$.

$$\det \mathrm{M}(0,1) = 0 \times 0 - (-1) \times 1 = 1$$

$$\det \mathrm{A} = 2 \times (-2) - (-5) \times (-2) = 1$$