Centrale Maths 1 PSI 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Tailleur (ENS Cachan) ; il a été relu par Walter Appel (Professeur en CPGE) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose d'étudier des solutions de certaines équations différentielles linéaires dont on ne connaît qu'une forme intégrale, en faisant appel à des notions d'algèbre et d'analyse plutôt basiques. Il comporte quatre parties qui dépendent les unes des autres.

- La première partie propose de calculer un développement en série entière et d'étudier une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Une fois prouvé qu'une solution particulière ne s'annule qu'une fois, on approche son unique zéro à l'aide de la méthode de Newton.
- La deuxième partie fait étudier plusieurs relations de récurrence sur la famille d'intégrales
$$\mathrm{I}_p(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\, t^p \, \mathrm{d}t$$
Il s'agit de la partie la plus calculatoire du sujet.
- La troisième partie introduit un opérateur différentiel ϕ, dont on étudie quelques propriétés (injectivité, surjectivité). On calcule entre autres les antécédents d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ par ϕ.
- La quatrième partie, qui fait appel à plusieurs résultats de la deuxième partie, vise à étudier la restriction de ϕ aux polynômes réels. On y trouve un peu plus d'algèbre mais elle reste tout de même assez calculatoire.
- La dernière partie vise à calculer
$$\mathrm{H}(x) = \int_0^x (1+t^2)\, \mathrm{e}^{t^2/2} \, \mathrm{d}t$$
et fait notamment appel à des résultats de la première partie.

Ce sujet est d'une difficulté modérée, mais les références permanentes aux questions précédentes demandent de prendre un peu de recul. Les méthodes de calcul utilisées étant assez classiques, il s'agit d'un excellent sujet de préparation aux concours.

Indications

Partie I

I.A Chercher à utiliser le produit de Cauchy pour calculer le terme général et justifier la convergence de la série.

I.B.2 Pour prouver que f ne s'annule qu'une fois, on peut montrer qu'elle est bijective. Pour cela, on remarque qu'elle est monotone et surjective.

Partie II

II.A.1 Ne pas oublier de justifier que les objets utilisés sont bien définis ! Noter de plus que $t\exp(-t^2/2)$ est la primitive de $\exp(-t^2/2)$.

II.A.2 Dériver par parties pour obtenir une relation entre I_p et I_{p-2}.

II.B.2 Chercher A_k sous la forme

$$\mathrm{A}_k = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n^k \, \mathrm{X}^{2n}$$

II.D.2 Penser à dériver la relation proposée pour retrouver le polynôme introduit à la question précédente.

Partie III

III.A.1 Ne pas oublier de montrer que ϕ est bien définie sur E, à valeur dans E.

III.A.4 Penser à la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle.

III.C.2 Procéder par récurrence en utilisant le fait que $\phi^k(f) = 0$ implique que $\phi(f)$ est dans le noyau de ϕ^{k-1}.

Partie IV

IV.A Changer les espaces de définition change l'injectivité et la surjectivité !

IV.B/C.1 Utiliser la formule trouvée à la question III.A.4, dans le but de calculer des antécédents de ϕ_0.

IV.C.2 Considérer la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{Q}_i}{\mu_i}$.

IV.C.3 Pour montrer que deux espaces sont en somme directe, on montre que leur intersection est réduite à $\{0\}$.

IV.C.4 Par définition $\mathrm{Im}\,(\phi_0) = \phi_0(\mathbb{R}[\mathrm{X}])$, or

$$\mathbb{R}[\mathrm{X}] = \mathrm{Vect}(\{\mathrm{X}^{2q}\}_{q\geqslant 0}) \oplus \mathrm{Vect}(\{\mathrm{X}^{2q+1}\}_{q\geqslant 0})$$

Partie V

V.B Développer le deuxième terme en série et identifier membre à membre.

Partie I

I.A La fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est développable en série entière, de rayon de convergence infini. En effet, la fonction exponentielle étant par définition développable en série entière, de rayon de convergence infini, on a

$$\forall \mathrm{A} > 0 \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{A}^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$$

et la convergence est absolue. En particulier, pour $\mathrm{A} = x^2$,

$$\forall x > 0 \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^2)^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{x^2}$$

et la convergence est à nouveau absolue. On note u cette série entière et $u_n x^n$ son terme général. On a donc

$$\forall q \in \mathbb{N} \qquad u_{2q} = \frac{1}{q!} \qquad \text{et} \qquad u_{2q+1} = 0$$

Par ailleurs, la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 + x^2 \end{cases}$$

est évidemment développable en série entière, de rayon de convergence infini. Notons $v_n x^n$ son terme général, on a alors

$$v_0 = v_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0, 2\} \qquad v_n = 0$$

Le produit de Cauchy de ces deux séries est par conséquent bien défini, son rayon de convergence est infini, et son terme général $a_k x^k$ est donné par

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k = \sum_{n=0}^{k} v_n \, u_{k-n}$$

On a donc $a_0 = v_0 u_0$, $a_1 = v_1 u_0 + v_0 u_1$. Or comme $v_1 = u_1 = 0$, $a_1 = 0$. Sinon, puisque seuls v_0 et v_2 sont non nuls parmi les v_n,

$$\forall k \geqslant 2 \qquad a_k = v_0 u_k + v_2 u_{k-2}$$

et par conséquent

$$\boxed{a_0 = 1\ ; \qquad \forall k \geqslant 0 \qquad a_{2k+1} = 0\ ; \qquad \forall k \geqslant 1 \qquad a_{2k} = \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} = \frac{k+1}{k!}}$$

Au final
$$\boxed{(1 + x^2)\,\mathrm{e}^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^{2k}}$$

> Une série entière est définie par son terme général $a_k x^k$. Certains professeurs considèrent que $\sum a_k x^{2k}$ n'est pas une série entière, mais que $\sum b_k x^k$ avec $b_{2q} = a_q$ et $b_{2q+1} = 0$ en est une. Il est dès lors plus sage de bien spécifier le terme général quand on introduit une série entière.

I.B.1 L'équation (E) est une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, et dont le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses solutions est un espace affine dont la direction est l'espace vectoriel engendré par les solutions de l'équation homogène

$$y' - xy = 0$$

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus est l'espace vectoriel

$$\{y : x \longmapsto \alpha \mathrm{e}^{x^2/2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

On applique alors la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière de l'équation (E). On cherche une telle solution sous la forme $y_0(x) = \alpha(x)\exp(x^2/2)$. y_0 est solution de (E) si et seulement si la fonction α est solution de l'équation différentielle

$$\alpha' = 1 + x^2$$

On prend par exemple $\alpha : x \longmapsto x + x^3/3$; d'où la solution particulière

$$y_0 : x \longmapsto \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x^2/2}$$

Finalement, la solution générale de l'équation (E) est

$$\boxed{y : x \longmapsto \left(\alpha_0 + x + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x^2/2} \qquad \alpha_0 \in \mathbb{R}}$$

I.B.2 Si f est solution de (E), elle s'écrit d'après la question précédente

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \left(\alpha + x + \frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x^2/2}$$

Or $f(0) = 1$ si et seulement si $\alpha = 1$, ainsi

$$\boxed{f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left(1 + x + \dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x^2/2} \end{cases}}$$

> L'équation (E) étant une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, et dont le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, il y a unicité au problème constitué de l'équation différentielle ordinaire et d'une condition initiale de type $y(t_0) = y_0$. La fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$ est donc bien définie, et est de plus unique.

Montrons que f ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$. On a clairement

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

f est de plus monotone. En effet, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car solution d'une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus, et on peut calculer sa dérivée

$$f'(x) = \left(1 + x^2 + x + x^2 + \frac{x^4}{3}\right)\mathrm{e}^{x^2/2} = \left(\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{x^4}{3}\right)\mathrm{e}^{x^2/2}$$