

Mines Physique 1 PC 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Emmanuel Bourgeois (ENS Lyon) ; il a été relu par Emmanuel Loyer (Professeur en CPGE) et Benoît Lobry (Professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur le chauffage des aliments dans un four micro-ondes, dont le principe physique repose sur l'absorption d'énergie électromagnétique par les molécules d'eau présentes dans les aliments. Il s'articule en trois parties très largement indépendantes.

- La première permet de comprendre comment la molécule H_2O interagit avec le champ électrique produit par la source de micro-ondes. Les questions 4 et 6 sont assez délicates.
- Dans la deuxième partie, le système étudié est le champ électromagnétique. On étudie son évolution au sein du matériau. Ceci permet de comparer le chauffage par micro-ondes au chauffage traditionnel.
- Enfin la dernière partie, plus longue et difficile que les deux premières, étudie le profil de température de l'aliment à chauffer.

Le sujet s'appuie sur le cours d'électromagnétisme dans les milieux (interaction d'une onde électromagnétique avec un milieu), ainsi que sur le cours de thermodynamique (transition de phase, diffusion thermique).

Sa difficulté ne réside ni dans les aspects calculatoires ni dans sa longueur, mais dans la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu. De nombreuses questions nécessitent en effet une bonne analyse qualitative conduisant à une modélisation raisonnable ; c'est le sens physique des candidats qui est ainsi testé.

Il permet de comprendre l'intérêt du choix du système d'étude lors de bilans d'énergie, et de montrer que l'association de différents domaines de la physique étudiés dans l'année séparément permet de modéliser des phénomènes physiques complexes et d'aspect pratique. Cela en fait un bon problème de révision.

INDICATIONS

Partie I

- 1 Pour un raisonnement d'ordre de grandeur, on peut supposer la liaison O–H purement ionique. Attention, il existe une infinité d'axes passant par le barycentre d'une molécule ! Choisir l'axe le plus simple pour l'évaluation du moment d'inertie.
- 2 Utiliser l'expression de la force de Coulomb.
- 3 Que devient l'équation différentielle lorsque le champ électrique est coupé ?
- 4 Comment s'exprime la puissance mécanique reçue par un solide ? Comment se simplifie cette expression si le système n'est soumis qu'à un couple ? Le moment dipolaire s'exprime par

$$\vec{p}_i = q \overrightarrow{O^- O^+}$$

où O^- et O^+ sont les positions des barycentres des charges négatives $-q$ et positives q de la molécule. Faire le lien avec le formulaire.

- 5 La valeur moyenne temporelle d'une grandeur G périodique de période T est

$$\overline{G} = \frac{1}{T} \int G(t) dt$$

- 6 Dans la glace, les molécules d'eau interagissent entre elles principalement par des liaisons hydrogène, qui sont partiellement rompues à l'état liquide.

Partie II

- 7 Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface donnée correspond à la puissance électromagnétique la traversant.
- 9 On peut trouver le temps caractéristique recherché par un raisonnement dimensionnel sur le coefficient de diffusion thermique. Dans un four traditionnel, l'aliment est chauffé par diffusion thermique depuis ses bords. Dans le four à micro-ondes, sous les hypothèses adoptées ici, le chauffage est uniforme.

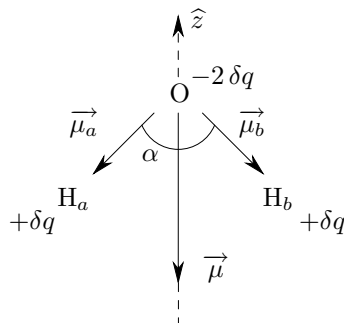
Partie III

- 10 Lire l'énoncé en entier avant de répondre à cette question.
- 11 Effectuer un bilan d'enthalpie à une épaisseur entre x et $x + dx$ en n'oubliant pas le terme source.
- 12 Utiliser soit les deux conditions aux limites, soit plus directement un argument de symétrie du problème pour exprimer les constantes d'intégration.
- 16 Où se forme la première goutte de vapeur ?
- 17 La masse molaire de l'eau est $M = 18 \text{ g.mol}^{-1}$.
- 18 Effectuer un bilan d'enthalpie sur un système judicieusement choisi. Les pertes latérales sont-elles négligeables ?

I. RELAXATION DIÉLECTRIQUE

1 Les caractéristiques structurales de la molécule d'eau sont représentées sur la figure ci-contre. L'atome d'oxygène étant plus électronégatif que celui d'hydrogène, la molécule d'eau présente un moment dipolaire permanent

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_a + \vec{\mu}_b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{\mu}_a = \delta q \overrightarrow{OH_a} \\ \vec{\mu}_b = \delta q \overrightarrow{OH_b} \end{cases}$$



D'où $\|\vec{\mu}\| = 2 \delta q d_{OH} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

et en ordre de grandeur,

$$\delta q \simeq e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \simeq 1 \quad \text{et} \quad d_{OH} \simeq 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

Finalement,

$$\boxed{\mu \simeq e d_{OH} \simeq 10^{-29} \text{ C.m}}$$

La valeur expérimentale du moment dipolaire de l'eau est $\mu = 1,85 \text{ D}$, avec $1 \text{ D} = 1/3 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$. Ce raisonnement permet d'obtenir la bonne puissance mais pas le facteur numérique : en effet, outre les approximations faites sur l'angle et sur la distance d_{OH} , avec $\delta q \simeq e$, on a supposé la liaison O-H purement ionique, ce qui est faux.

Le moment d'inertie par rapport à un axe \hat{z} est défini pour un solide par

$$J = J_{\hat{z}} = \iiint_{\text{P}} d_P^2 dm(\text{P})$$

où d_P est la distance du point P à l'axe \hat{z} . L'énoncé ne nous précisant pas par rapport à quel axe calculer le moment d'inertie, on choisit l'axe \hat{z} de la figure, qui passe bien par le barycentre de la molécule. Sachant que $m_e/m_p \simeq 5 \cdot 10^{-4}$, seuls les noyaux contribuent de façon significative au moment d'inertie. On peut de plus les supposer ponctuels. Il en résulte que pour l'axe considéré,

$$J \simeq 2 m_H d_H^2$$

Sachant que $m_P = \frac{1}{2} \frac{M_{H_2}}{N_A}$ et $d_H = d_{OH} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \simeq d_{OH}$

on en conclut

$$\boxed{J \simeq \frac{M_{H_2}}{N_A} d_{OH}^2 \simeq 10^{-47} \text{ kg.m}^2}$$

On peut évaluer la contribution du noyau d'oxygène en le supposant sphérique de taille $r \simeq 10^{-15} \text{ m}$ (taille typique du noyau atomique) et en supposant la répartition massique homogène

$$J_{\hat{z}} \simeq \frac{2}{5} m_O r^2 \simeq 10^{-56} \text{ kg.m}^2$$

Cette contribution est bien négligeable devant celle des protons.

En choisissant un autre axe passant par le barycentre, on obtient le même ordre de grandeur, cela résulte du caractère coudé de la molécule.

2 On définit la polarisabilité par la relation $\langle \vec{p} \rangle_{\text{éq}} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}$

Dimensionnellement,

$$[\alpha] = \frac{[\langle \vec{p} \rangle]}{[\varepsilon_0 \vec{E}]}$$

avec $[\langle \vec{p} \rangle] = \text{Q.L}$

Or, d'après la loi de Coulomb, et par définition du champ électrique,

$$[F] = \frac{1}{[\varepsilon_0]} \frac{Q^2}{L^2} = Q [\vec{E}]$$

D'où $[\varepsilon_0 \vec{E}] = \frac{Q}{L^2}$

Il en résulte $[\alpha] = L^3$

La polarisabilité est homogène à un volume.

En l'absence de champ électrique, du fait de l'agitation thermique, l'orientation des dipôles est isotrope donc $\langle \vec{p} \rangle = \vec{0}$.

3 Négligeons le régime transitoire pour rechercher la solution forcée de l'équation d'évolution de la valeur moyenne du dipôle électrique. Injectons la forme proposée dans l'équation différentielle et projetons sur \hat{z} :

$$\tau \frac{d\langle p \rangle}{dt} + \langle p \rangle = \varepsilon_0 \alpha E_m \cos(\omega t)$$

avec $\langle p \rangle = p' \cos'(\omega t) + p'' \sin(\omega t)$

Il en résulte $\varepsilon_0 \alpha E_m \cos(\omega t) = -\omega \tau p' \sin(\omega t) + \omega \tau p'' \cos(\omega t) + p' \cos(\omega t) + p'' \sin(\omega t)$

On en déduit, en remarquant que $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ sont linéairement indépendants,

$$-\omega \tau p' + p'' = 0 \quad \text{et} \quad \omega \tau p'' + p' = \varepsilon_0 \alpha E_m$$

Finalement,

$$\begin{cases} p'(\omega \tau) = \frac{p_{\max}}{1 + (\omega \tau)^2} \\ p''(\omega \tau) = \frac{\omega \tau p_{\max}}{1 + (\omega \tau)^2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad p_{\max} = \varepsilon_0 \alpha E_m$$

La figure 1 de l'énoncé montre que

- pour une excitation trop rapide, le dipôle n'arrive pas à suivre le champ (l'amplitude de la courbe p' diminue lorsque τ augmente). Le temps τ s'interprète alors comme le temps de relaxation du système, caractérisant le temps moyen mis par un dipôle pour s'orienter suivant le champ.
- il y a un déphasage, c'est-à-dire un retard, entre l'excitation et l'effet, déphasage visualisé par la courbe p'' . La réponse à l'excitation n'est pas instantanée. Ce déphasage s'annule quand $\omega \tau \rightarrow \infty$, c'est-à-dire quand l'évolution du dipôle se découple complètement de celle du champ.