

## Centrale Physique 2 PC 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Marc Jungers (Chercheur au CNRS) ; il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

---

Ce sujet porte sur l'étude des bulles de dioxyde de carbone dans un verre de champagne. Les différentes phases de la vie d'une bulle y sont étudiées.

- La première partie porte sur la formation des bulles. Une étude thermodynamique permet de déterminer le rayon critique d'une bulle pour qu'elle puisse croître spontanément.
- La deuxième partie s'intéresse d'abord à la croissance des bulles en utilisant un modèle de diffusion des molécules de dioxyde de carbone, puis à l'ascension des bulles dans le verre grâce à la poussée d'Archimède.
- La troisième partie est consacrée tout particulièrement à l'étude de l'écoulement de liquide autour de la bulle et à la détermination plus précise de la résultante des forces de pression du liquide sur la bulle.
- La quatrième partie s'attache à l'explosion de la bulle à la surface du liquide. Les premières questions portent sur l'étude expérimentale, par une méthode d'interférométrie optique, de l'épaisseur du film liquide. Les questions suivantes proposent l'étude de la dynamique de la rupture du film de la bulle.
- La cinquième et dernière partie traite des conditions de rupture du jet ascendant créé par l'explosion de la bulle à la surface de liquide via la détermination de la pression dans la colonne de liquide.

Ce problème aborde de nombreuses notions différentes. Même si les parties IV et V sont plus délicates, l'ensemble est de difficulté raisonnable et demande une bonne capacité d'interprétation physique plus qu'une virtuosité dans les calculs.

## INDICATIONS

### Première partie

- I.A Donner la définition d'un potentiel thermodynamique et calculer la différentielle  $dG^*$  en appliquant au système fermé (liquide et gaz) les premier et deuxième principes de la thermodynamique.
- I.B Exprimer  $dn_\ell$ ,  $dV_g$  et  $d\Sigma$  en fonction de  $dn_g$  et  $da$  et utiliser le fait que  $G^*$  est un potentiel thermodynamique.
- I.C.2 Sur la figure regarder l'évolution spontanée possible du rayon  $a$  sachant que  $G^*$  est un potentiel thermodynamique.

### Deuxième partie

- II.A.1 Faire un bilan de quantité de molécules de dioxyde de carbone sur la couronne de champagne liquide.
- II.A.2 Utiliser la loi de Fick et la relation obtenue à la question précédente.
- II.A.4 Injecter la valeur  $C(r)$  trouvée à la question II.A.3 dans la loi de Fick appliquée en  $r = a$  et faire un bilan de quantité de particules.
- II.A.5 Le dioxyde de carbone est présent sous forme gazeuse et considéré comme un gaz parfait.
- II.B.1.c Calculer le nombre de Reynolds et vérifier qu'il correspond à une zone de régime linéaire permanent.
- II.B.2 Déterminer la vitesse  $U(t)$  en utilisant l'expression de  $a(t)$ .

### Troisième partie

- III.A.1 L'écoulement est incompressible. Donner la divergence du vecteur  $\vec{v}$ .
- III.A.2.c Penser à un dipôle électrostatique.
- III.B.2 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un élément de volume liquide dans le référentiel non galiléen lié à la bulle.
- III.B.3.a Étudier les forces de pression élémentaire pour  $\theta$  et  $\theta + \pi$ .
- III.B.3.b Étudier les forces de pression élémentaire pour  $\theta$  et  $-\theta$ .
- III.B.3.e Reprendre le résultat de la question II.B.1.b et l'équation (1).

### Quatrième partie

- IV.A.1 Remarquer que les coefficients de réflexion sont faibles.
- IV.A.3 Évaluer la longueur de cohérence.
- IV.B.1 Faire un bilan de quantité de mouvement. Exprimer en fonction de  $\mu$ ,  $X(t)$ ,  $e$  et  $b$  la masse  $m(t)$ .

### Cinquième partie

- V.A.2 Utiliser le calcul obtenu à la question V.A.1. Étudier l'effet des résultantes des forces de pression sur une couche horizontale de liquide entre les points B et C.
- V.C.1 S'inspirer de la définition du nombre de Reynolds.
- V.C.2 Étudier la relation de Bernoulli.

## I. FORMATION DES BULLES

**I.A** Un potentiel thermodynamique est une fonction permettant de déterminer l'évolution d'un système libéré de ses contraintes extérieures et qui vérifie les propriétés suivantes :

- elle décroît lors de l'évolution spontanée du système ;
- lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique, elle est minimale.

Calculons la différentielle  $dG^*$  :

$$dG^* = dU + p_e dV - T dS$$

car  $p_e$  et  $T$  sont constantes. D'après le premier principe appliqué au système fermé {liquide + bulle} :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - p_e dV$$

avec  $\delta Q$  le transfert thermique reçu de l'extérieur du système {liquide + bulle}, et  $\delta W$  le travail des forces de pression sur le système (seules forces qui travaillent ici car on néglige la pesanteur). En appliquant le second principe de la thermodynamique à ce système fermé, on obtient :

$$dS = \delta S_{\text{échange}} + \delta S_{\text{création}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta S_{\text{échange}} = \frac{\delta Q}{T} \\ \delta S_{\text{création}} \geq 0 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{dG^* = -T \delta S_{\text{création}} \leq 0}$$

Comme, à l'équilibre  $\delta S_{\text{création}} = 0$ , la fonction  $G^*$  est un potentiel thermodynamique.

La fonction  $G^*$  n'est pas l'enthalpie libre  $G$  puisque la pression extérieure  $p_e$  est différente de la pression  $p$  dans le système. Une autre différence importante entre  $G$  et  $G^*$  est que  $G$  n'est pas un potentiel thermodynamique.

**I.B.1** Exprimons les différentes grandeurs en fonction des variables indépendantes  $a$ ,  $V_\ell$  et  $n_g$  :

$$\begin{cases} n_\ell + n_g = n \\ V_g = \frac{4}{3}\pi a^3 \\ \Sigma = 4\pi a^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} dn_\ell = -dn_g \\ dV_g = 4\pi a^2 da \\ d\Sigma = 8\pi a da \end{cases}$$

L'expression de la différentielle  $dG^*$  devient alors :

$$\boxed{dG^* = (\mu_g - \mu_\ell) dn_g + (p_e - p_\ell) dV_\ell + 4\pi a^2 \left( p_e - p_g + \frac{2A}{a} \right) da}$$

Pour une variation  $dV_\ell$  de  $V_\ell$  à  $n_g$  et  $a$  fixés (soit  $dn_g = 0$  et  $da = 0$ ), à l'équilibre :

$$dG^* = 0 = (p_e - p_\ell) dV_\ell$$

D'où

$$\boxed{p_e = p_\ell}$$

Cette relation peut s'interpréter physiquement. À  $n_g$  et  $a$  fixés (donc  $V_g$  aussi), une variation de volume  $dV_\ell$  de  $V_\ell$  n'entraîne pas de travail des forces de pression à l'équilibre si les pressions  $p_\ell$  et  $p_e$  sont identiques.

**I.B.2** À  $n_g$  et  $V_\ell$  fixés, une variation  $da$  de  $a$  à l'équilibre entraîne

$$dG^* = 0 = 4\pi a^2 \left( p_e - p_g + \frac{2A}{a} \right) da$$

soit

$$p_g = p_e + \frac{2A}{a}$$

La pression dans la bulle  $p_g$  est toujours plus importante à l'équilibre que la pression extérieure  $p_e$ .

**I.B.3** Pour  $a$  et  $V_\ell$  fixés une variation  $dn_g$  de  $n_g$  entraîne à l'équilibre :

$$dG^* = 0 = (\mu_g - \mu_\ell) dn_g$$

soit

$$\mu_g = \mu_\ell$$

**I.B.4** À l'équilibre les relations obtenues dans les questions précédentes sont simultanément valables. Donc

$$\mu_g = \mu_\ell = \mu_g^0 + RT \ln \left( \frac{p_g}{p^0} \right) = \mu_\ell^0 + RT \ln \left( \frac{C}{C^0} \right)$$

soit

$$\frac{\mu_g^0 - \mu_\ell^0}{RT} = \ln \left( \frac{C}{C^0} \frac{p^0}{p_g} \right)$$

En conclusion

$$p_g = p^0 \frac{C}{C^0} \exp \left( -\frac{\mu_g^0 - \mu_\ell^0}{RT} \right) = p_e + \frac{2A}{a_{\text{eq}}} \quad (\text{E})$$

**I.B.5** Par définition,  $p_\infty$  est la pression extérieure  $p_e$  telle qu'une bulle de rayon  $a$  infini soit en équilibre avec la phase liquide pour le même nombre volumique  $C$ . On a alors, en faisant apparaître cette définition dans l'équation (E) :

$$p_\infty = p^0 \frac{C}{C^0} \exp \left( -\frac{\mu_g^0 - \mu_\ell^0}{RT} \right)$$

L'équation (E) se réécrit alors sous la forme :

$$p_\infty = p_e + \frac{2A}{a_{\text{eq}}}$$

soit

$$a_{\text{eq}} = \frac{2A}{p_\infty - p_e}$$

**I.C.1** Pour  $a = a_{\text{eq}}$ , la fonction  $G^*$  est bien extrémale. Ceci est bien compatible avec l'étude précédente. Cependant cet équilibre est instable puisque  $G^*$  est maximale en  $a = a_{\text{eq}}$  et non minimale. Une bulle ne peut pas conserver un rayon  $a$  égal à  $a_{\text{eq}}$ .

**I.C.2** L'évolution spontanée du système se faisant toujours dans le sens d'une diminution de  $G^*$ , on considère deux cas pour l'évolution de  $a$  : soit  $0 < a < a_{\text{eq}}$  soit  $a_{\text{eq}} < a$ .

- Cas  $0 < a < a_{\text{eq}}$  : le rayon  $a$  diminue jusqu'à atteindre  $a = 0$  (minimum de  $G^*$ ). La bulle diminue de taille jusqu'à disparaître.
- Cas  $a_{\text{eq}} < a$  : le rayon  $a$  ne peut qu'augmenter.