# X Maths PC 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Fabrice Mathurin (ENS Cachan) et Walter Appel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Arnaud Durand (ENS Cachan) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Voici un sujet bien conçu dans sa progression, mais qui exige de bien maîtriser le cours sur les projections orthogonales sous peine de sécher dès les premières questions.

Il se compose de trois parties, balayant un champ très large du programme de classe préparatoire : algèbre linéaire, algèbre des polynômes, orthogonalité, intégration, équations différentielles, séries entières, ce qui en fait un excellent problème de révision en fin d'année.

Il est nécessaire, pour pouvoir l'aborder dans de bonnes conditions, de prendre beaucoup de recul par rapport aux questions, et de toujours se demander quelle est l'interprétation géométrique des résultats demandés. Sans cet effort, de nombreuses questions sont infaisables.

- La première partie traite de résultats généraux dans des espaces vectoriels euclidiens, concernant l'existence et l'unicité de bases orthogonales soumises à des conditions données par l'énoncé. On redémontre ainsi quelques propriétés certainement vues en cours à propos de la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.
- La deuxième partie particularise l'étude de la première au cas d'espaces vectoriels de polynômes. Les questions ne font que très peu appel au programme : seule la division euclidienne est véritablement nécessaire pour l'aborder. Néanmoins, de bonnes capacités de synthèse et un certain recul seront nécessaires pour avancer.
- La dernière partie, plus orientée vers l'analyse, plus technique et plus calculatoire, ne requiert que peu de résultats des parties précédentes. Elle utilise des raisonnements géométriques fondés sur du calcul différentiel et intégral, permettant de caractériser les vecteurs et les valeurs propres d'un endomorphisme en dimension infinie. On en déduit les solutions sur $]-1\,;1\,[$ d'une équation différentielle.

  Les questions les plus difficiles du sujet se trouvent dans cette dernière partie ; notamment, la toute dernière question est manifestement là pour départager les meilleurs candidats.

# Indications

## Partie I

1 Raisonner par analyse-synthèse. Introduire $\pi'$, projecteur orthogonal sur $\mathrm{F}^{\perp}$, puis utiliser l'égalité (après l'avoir justifiée) $u + \lambda v = \pi'(u + \lambda v)$.

2 Construire chaque vecteur en notant qu'il appartient à une droite vectorielle, que l'on impose sa norme, et que sa direction est déterminée par la positivité du produit scalaire $(w_k \mid v_k)$.

## Partie II

3.a Rappeler la définition d'un produit scalaire.

3.b Appliquer le résultat de la question 3.a.

4.a Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{P}_n$ par $\mathrm{P}_{n-1}$. Exploiter le fait que les $\mathrm{P}_i$ forment une base orthogonale échelonnée en degrés, adaptée à $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.b Regarder les coefficients dominants de chaque polynôme dans l'égalité de la question 4.a puis effectuer le produit scalaire avec $\mathrm{P}_{n-2}$.

5.a Étudier le signe d'un polynôme ne possédant pas de racine de multiplicité impaire sur un intervalle. Utiliser judicieusement le fait que $\mathrm{P}_n$ est orthogonal à $\mathrm{E}_{n-1}$.

5.b Déterminer le signe de $\mathrm{Q}_n$.

6.a Énoncer le théorème de division euclidienne pour deux polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

6.b Calculer $\mathrm{L}_i(a_j)$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et comparer les racines des polynômes du membre de gauche et du membre de droite.

6.c Démontrer que $\mathrm{G}(a_i) = \mathrm{R}(a_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

6.d Considérer $\mathrm{G} = \mathrm{L}_i^2$ et conclure.

## Partie III

8 Montrer que $(\mathrm{F}_n \mid \mathrm{P}) = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_{n-1}$ en effectuant $n$ intégrations par parties ; en déduire le résultat voulu.

9 Montrer que $(\mathrm{T}(\mathrm{F}_n) \mid \mathrm{P}) = 0$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_{n-1}$.

10 Calculer $\mathrm{T}(\mathrm{F}_n)$ en développant son expression au moyen de la formule de Leibniz.

11.a Injecter la série formelle puis égaliser terme à terme.

11.c Effectuer une synthèse des résultats de la question 11.b.

11.d Dans le cas des solutions non polynomiales, montrer que $\sum c_{2n}$ et $\sum c_{2n+1}$ divergent. Montrer que les séries paires et impaires divergent en $-1$ et en $+1$. En considérant la parité de ces fonctions, en déduire qu'aucune combinaison linéaire de ces deux séries n'admet de prolongement sur $[\,-1\,;1\,]$.

# I. Procédé d'orthogonalisation

$\boxed{1}$ Comme c'est souvent le cas face à ce genre de questions qui demande de construire des objets puis de déterminer leur unicité, il est astucieux de commencer par démontrer l'unicité : c'est souvent plus facile et cela permet d'avoir une idée des éléments en jeu avant de se lancer dans la construction des objets demandés. On utilise donc un raisonnement du type « analyse-synthèse ». On notera désormais $\pi' : \mathrm{E} \to \mathrm{F}^{\perp}$ le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{F}^{\perp}$, c'est-à-dire que

$$\pi' = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - \pi$$

**Analyse.** Supposons qu'il existe un couple $(u, \lambda)$ vérifiant $(u + \lambda v \mid v) > 0$ et $\|u + \lambda v\| = \alpha$, et tel que $u + \lambda v$ soit orthogonal à F.

Alors
$$\begin{aligned} u + \lambda v &= \pi'(u + \lambda v) && \text{car } u + \lambda v \in \mathrm{F}^{\perp} \\ &= \pi'(u) + \lambda\, \pi'(v) && \text{car } \pi' \text{ est linéaire} \end{aligned}$$

Mais $u \in \mathrm{F}$ donc $\pi'(u) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{u + \lambda v = \lambda\, \pi'(v), \text{ où } \pi' \text{ est le projecteur sur } \mathrm{F}^{\perp}.}$$

En prenant la norme de chaque membre de cette égalité, et en notant que $\pi'(v) \neq 0$ puisque $v \notin \mathrm{F}$, on obtient immédiatement

$$|\lambda| = \frac{\alpha}{\|\pi'(v)\|}$$

Il reste encore une incertitude sur le signe de $\lambda$, que l'on va lever dès maintenant. En décomposant $v$ sous la forme $v = \pi(v) + \pi'(v)$, on obtient :

$$(u + \lambda v \mid v) = (\lambda \pi'(v) \mid v) = \lambda \|\pi'(v)\|^2 + \lambda(\pi'(v) \mid \pi(v))$$

c'est-à-dire, en utilisant l'orthogonalité entre $\pi(v)$ et $\pi'(v)$ :

$$(u + \lambda v \mid v) = \lambda\, \|\pi'(v)\|^2$$

Par hypothèse, $(u + \lambda v \mid v) > 0$ et $\alpha > 0$, ce qui prouve que $\lambda$ est strictement positif, et par conséquent :

$$\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{\|\pi'(v)\|}}$$

Finalement
$$\boxed{u = \lambda\, \pi'(v) - \lambda v = -\lambda\, \pi(v)}$$

Les deux dernières égalités montrent l'unicité du couple $(u, \lambda)$.

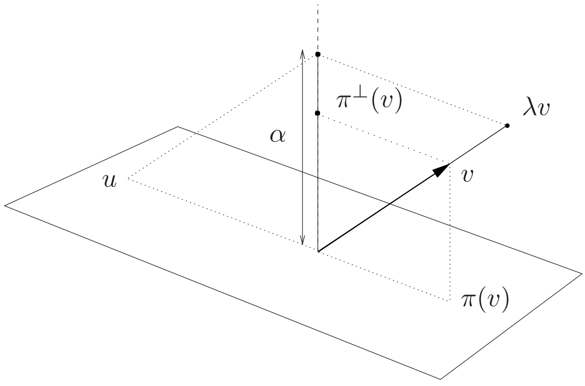
**Synthèse.** En utilisant les équations que doivent vérifier $\lambda$ et $u$ de la précédente analyse, on construit le couple $(u, \lambda)$ :

$$\lambda = \frac{\alpha}{\|\pi'(v)\|} \qquad \text{et} \qquad u = -\lambda v + \lambda \pi'(v)$$

Par construction, on a bien $\|u + \lambda v\| = \alpha$ ; $u + \lambda v$ est le projeté orthogonal de $\lambda v$ sur $\mathrm{F}^{\perp}$, donc ce vecteur est bien orthogonal à F ; enfin,

$$(u + \lambda v \mid v) = \lambda(\pi'(v) \mid v) = \lambda \|\pi'(v)\|^2 > 0$$

Faire une figure ne saurait nuire à la compréhension de la question !



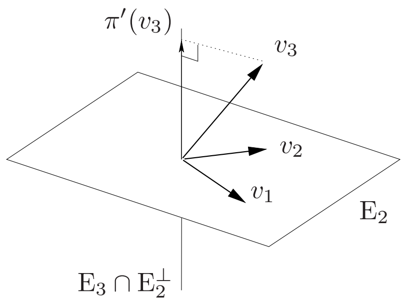

**2** Montrons d'abord l'existence et l'unicité de $w_0$. On cherche un vecteur $w_0$ tel que $w_0$ appartienne à la droite vectorielle engendrée par $v_0$, et on impose la norme de $w_0$ : cela ne laisse donc que deux possibilités, qui sont respectivement

$$\frac{\alpha_0}{\|v_0\|}\, v_0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{\alpha_0}{\|v_0\|}\, v_0$$

La condition $(w_0 \mid v_0)$ implique que seul le premier choix convient. Ainsi, $w_0$ existe, est unique et vaut

$$w_0 = \frac{\alpha_0}{\|v_0\|}\, v_0$$

On peut étendre ce principe à la construction de tous les autres vecteurs. Soit $k \in [\![ 1\,;n ]\!]$. La remarque essentielle est la suivante : l'espace $\mathrm{E}_k \cap \mathrm{E}_{k-1}^\perp$ est une droite vectorielle ; elle est engendrée par $\pi'_k(v_k)$, où $\pi'_k : \mathrm{E}_k \to \mathrm{E}_{k-1}^\perp$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{E}_{k-1}^\perp$. Le cas $k = 3$ est représenté ci-dessous :




Puisque la norme de $w_k$ est imposée, on sait donc que $w_k$ ne peut être qu'un seul des vecteurs $\alpha_k/\|\pi'_k(v_k)\|\,\pi'_k(v_k)$ et $-\alpha_k/\|\pi'_k(v_k)\|\,\pi'_k(v_k)$. Enfin, la condition de positivité du produit scalaire $(w_k \mid v_k)$ implique que

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\|\pi'(v_k)\|}\,\pi'(v_k)$$

Réciproquement, ce vecteur convient.