Centrale Maths 1 PC 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Lecomte (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet propose d'étudier quelques propriétés, exemples et contre-exemples dans le registre des suites ultimement périodiques. Comme leur nom l'indique, ces suites deviennent périodiques à partir d'un certain rang.

L'énoncé propose de s'intéresser à des exemples concrets de suites : on aimerait déterminer si elles sont ultimement périodiques ou non. Cela mène à des questions difficiles, mais très intéressantes.

- La première partie de cette épreuve consiste à étudier les propriétés élémentaires des suites ultimement périodiques (la plupart étant déjà connues pour les suites périodiques). On y établit que toutes les périodes d'une telle suite a sont multiples d'un même entier appelé ensuite *la* période. Puis on étudie la série entière $\sum a_n x^n$, dont on détermine le rayon de convergence, et on montre que sa somme est une fonction rationnelle.
- La deuxième partie s'intéresse au caractère ultimement périodique de trois suites relativement simples. On est guidé à travers chaque cas par trois ou quatre questions de difficulté modérée.
- La troisième partie semble s'écarter du thème général et s'attache principalement à faire démontrer par le candidat l'irrationalité de π. Il s'agit d'un résultat bien connu, mais dont peu de personnes ont déjà vu la preuve en classes préparatoires.
- Finalement, on étudie dans la dernière partie la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \sin n > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Déterminer si cette suite est ultimement périodique est une tâche difficile, technique et ingénieuse. On utilise abondamment le fait que π est irrationnel.

Cette épreuve est très longue (trop longue pour les quatre heures imparties), globalement assez difficile et les questions sont de difficultés inégales.

Néanmoins, nous l'avons trouvée extrêmement intéressante. C'est l'occasion de pouvoir dire qu'on a démontré soi-même l'irrationalité de π, ou d'être confronté à la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le comportement est si difficile à appréhender.

De manière générale, cette épreuve n'utilise pas beaucoup de résultats de cours. Elle teste surtout la perspicacité du candidat, plutôt que son habileté à manier les théorèmes appris en cours.

Indications

Première partie

I.B.1 Définir T comme étant le plus petit élément non nul de $\mathscr{P}(a)$. Si p est un autre élément de $\mathscr{P}(a)$, effectuer la division euclidienne de p par T.

I.B.2 Si p est un élément de $\mathscr{P}(a)$, on note n_p le plus petit entier à partir duquel la suite a devient p-périodique.
Établir d'abord que $n_p \leqslant n_0$ en utilisant la question I.B.1.
Si $n \geqslant n_p$, on sait que

$$\forall \lambda \in \mathbb{N} \qquad a_{n+\lambda p} = a_n \qquad \text{et} \qquad a_{n+\mathrm{T}+\lambda p} = a_{n+\mathrm{T}}$$

Choisir un λ convenable pour pouvoir aussi assurer que $a_{n+\mathrm{T}+\lambda p} = a_{n+\lambda p}$ et en déduire que $a_{n+\mathrm{T}} = a_n$. Conclure.

I.C.1 La série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence infini si et seulement si la suite a est nulle à partir d'un certain rang.

I.C.2 Couper la somme au rang n_0. Multiplier le terme

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$$

par x^{T}, puis exploiter la T-périodicité de a pour établir que $(1 - x^{\mathrm{T}})\mathrm{S}(x)$ est un polynôme.

I.D Considérer la fonction développable en série entière $x \longmapsto \dfrac{1}{1 - x/2}$.

Deuxième partie

II.A Examiner les dix premiers termes de la suite $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ devrait suffire à se faire une idée de la réponse.

II.B.2 Dans l'expression de $\mathrm{S}(x)$ comme somme d'une série entière, séparer les termes pairs des termes impairs. La manière dont la suite a est définie devrait permettre alors d'établir que $\mathrm{S}(x^2) = \mathrm{S}(x)/(1-x)$. Itérer cette relation avec $x^{2^k}, x^{2^{k-1}}, \ldots, x$ et se souvenir que S est continue en 0.

II.B.3 On sait que pour tout entier strictement positif k, $\dfrac{1 - x^k}{1 - x}$ a une limite finie lorsque x tend vers 1.

II.C.1 La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, b-1\}$. Nécessairement, certains termes doivent être répétés. Utiliser alors la relation $10\, r_{n-1} = b d_n + r_n$, valable pour tout n.

II.C.4 La relation précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout entier n, $a = b \sum\limits_{k=0}^{n} d_n 10^{-n} + \dfrac{r_n}{10^n}$.

Troisième partie

III.D.1 H est une application linéaire entre deux espaces de même dimension. D'après le théorème du rang, il est suffisant de montrer que H est injective pour pouvoir dire qu'il s'agit d'une bijection.

III.D.2 La suggestion est la même qu'à la question III.D.1, en considérant cette fois l'opérateur $\widetilde{\mathrm{H}} : \mathrm{S}\times\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{S}$, qui coincide avec H sur $\mathrm{S}\times\mathrm{A}$. Ne pas oublier de montrer préalablement que $\mathrm{H}(\mathrm{S}\times\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}\times\mathrm{S}$.

III.D.3 Établir le résultat par récurrence. Les polynômes $(\mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{Q}_{n+1})$, que l'on cherche alors à construire, vérifient la relation $\mathrm{H}(\mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{Q}_{n+1}) = (\mathrm{XP}_n, \mathrm{XQ}_n)$. Leur existence est donc assurée par le résultat de la question III.D.2.

III.D.4 Utiliser les relations établies aux questions III.C.2 et III.D.3.

III.E.1 Le polynôme P_n est de degré au plus n. Par conséquent, $\mathrm{P}_n(\pi/2) = \mathrm{P}_n(p/2q)$ est une somme de fractions dont $(2q)^n$ est un dénominateur commun.

On a $f_n(\pi/2) = \mathrm{P}_n(\pi/2)$ d'après la question III.D.3. Utiliser alors la majoration de la question III.B.2 pour montrer que $(2q)^n\mathrm{P}_n(\pi/2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

III.E.2 Revenir à la définition de f_n : montrer par récurrence que f_n est strictement positive sur $]\,0\,;\pi/2\,]$. En déduire que $(2q)^n\mathrm{P}_n(\pi/2) \geqslant 1$. Conclure.

Quatrième partie

IV.A.2 Pour tout entier k supérieur à N, $2k$ est aussi supérieur à N. D'après la question IV.A.1, $\sin(2k\mathrm{T})$ et $\sin(k\mathrm{T})$ ont le même signe.

IV.B.3 Si x appartient à G, montrer que $x - a\mathrm{E}(x/a) = 0$ en vérifiant qu'il s'agit d'un élément de G, positif, inférieur strictement à a.

IV.B.4 Comme 0 est l'infimum de G^+ et n'appartient pas à cet ensemble, il vérifie la propriété

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists g \in \mathrm{G} \qquad 0 < g < \varepsilon$$

IV.C.2 Traiter d'abord le cas où $x > 0$. Pour tout entier n, la suite $(kg_n)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Il existe donc un entier K_n tel que $\mathrm{K}_n g_n \leqslant x < (\mathrm{K}_n + 1)g_n$. Vérifier que la suite $(\mathrm{K}_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

IV.D.1 D'après la question IV.C.2, il existe une suite $(p_n\mathrm{T} + 2\pi q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d´éléments de G convergeant vers $2\pi/3$. Vérifier que $k_n = |p_n|$ convient.

Pour la suite, supposer que $\big(\cos(k_n\mathrm{T})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Comme elle converge vers $-1/2$, elle est constante à partir d'un certain rang N. En particulier, $\cos(k_\mathrm{N}\mathrm{T}) = -1/2$. En déduire que π est rationnel et conclure.

IV.D.2 D'après la question précédente, l'ensemble $\{k_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini. Comme il ne contient que des entiers, la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et il s'ensuit que $\{n \mid k_n \geqslant \mathrm{M}\}$ est infini quel que soit le réel $\mathrm{M} > 0$. Il s'agit là de l'ingrédient essentiel pour construire la suite extraite demandée.

IV.D.3 Les résultats obtenus aux questions IV.A.2 et IV.D.2 se contredisent.

Partie I

I.A On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans UP, ainsi qu'un réel λ. Les suites étant ultimement périodiques, on sait que

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \quad \exists n_a \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_a \qquad a_{n+p} = a_n$$

et
$$\exists q \in \mathbb{N}^* \quad \exists n_b \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_b \qquad b_{n+p} = b_n$$

On pose alors $n_0 = \operatorname{Max}(n_a, n_b)$, de sorte que a et b sont toutes deux périodiques après le rang n_0. On a alors

$$\forall n \geqslant n_0 \qquad \lambda a_{n+pq} + b_{n+pq} = \lambda a_n + b_n$$

puisque
$$a_{n+pq} = a_{n+(q-1)p} = a_{n+(q-2)p} = \cdots = a_n$$

et de même pour b_{n+pq}. La suite $\lambda a + b$ est donc pq-périodique à partir du rang n_0 : elle se trouve dans UP. Bien entendu, UP n'est pas vide puisqu'il contient la suite constante nulle. Par conséquent,

$$\boxed{\text{UP est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

Pour tout entier k, on note e_k la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le k^{e} qui vaut 1. Il s'agit d'une suite ultimement périodique, puisqu'elle est nulle à partir du rang $k+1$. Alors la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est linéairement indépendante.

En effet, donnons-nous une partie finie $\{n_1, \ldots, n_r\}$ de $\mathbb{N}$ ainsi que des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k e_{n_k}$ soit la suite nulle. Pour un entier n quelconque, son n^{e} terme est nul, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_{n_k,n} = 0$$

Alors, pour tout h dans $\{1, \ldots, r\}$, on particularise la relation précédente en $n = n_h$ pour obtenir $\lambda_h = 0$, ce qui prouve la liberté de la famille $(e_{n_k})_{1\leqslant k\leqslant r}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'espace vectoriel UP est de dimension infinie car} \\ \text{il contient la famille libre infinie } (e_k)_{k\in\mathbb{N}}.\end{array}}$$

I.B.1 L'ensemble $\mathscr{P}(a)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément T. Par suite, a admet T pour période à partir d'un certain rang n_0.

Soit k un entier strictement positif et n un entier supérieur à n_0. On a

$$a_{n+k\mathrm{T}} = a_{n+(k-1)\mathrm{T}} = a_{n+(k-2)\mathrm{T}} = \cdots = a_n$$

La suite a est donc kT-périodique au-delà du rang n_0. Ceci prouve que pour tout entier naturel k non nul, kT est un élément de $\mathscr{P}(a)$.

Réciproquement, soit p un élément de $\mathscr{P}(a)$. Il existe un entier n_1 tel que a soit p-périodique à partir du rang n_1. On pose donc $\mathrm{N} = \operatorname{Max}(n_0, n_1)$, de sorte que a soit à la fois p et T-périodique à partir du rang N. Procédons à la division euclidienne de p par T :

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < \mathrm{T} \qquad p = q\mathrm{T} + r$$