

CCP Physique 2 MP 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Ahmed Youssef (ENS Cachan) ; il a été relu par Marc Legendre (Professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (ENS Ulm).

Le sujet comporte deux parties indépendantes et de difficultés inégales.

- La première partie commence par la présentation d'un modèle très classique de l'atome dû à J.-J. Thomson, à qui l'on attribue également la découverte de l'électron. On cherche à caractériser notamment la réponse de cet atome à une excitation électrique externe. Ensuite, on étend ce modèle à l'étude de la propagation du rayonnement dans un plasma après avoir étudié ses oscillations libres. Cette partie est relativement facile, les idées et les calculs mis en œuvre se rencontrent régulièrement aux concours et il est bon de savoir les faire.
- La deuxième partie est plus difficile. Elle porte sur un système optique qui permet d'élargir temporellement une impulsion lumineuse ultra-brève. Après avoir amené le candidat à retrouver quelques résultats sur la diffraction par un réseau, l'énoncé aborde l'étude spectrale d'un signal lumineux à l'aide de la transformée de Fourier, outil qui intervient très souvent en physique et dont il est nécessaire de comprendre la signification et les mécanismes de base.

Ce sujet constitue une bonne révision du cours sur la propagation d'ondes électromagnétiques dans les plasmas. Il permet également une exploration pointue du domaine des transformées de Fourier, en passant par une révision rapide de la diffraction dans une configuration probablement nouvelle pour le lecteur.

INDICATIONS

Partie A

- A.1.2.3 Si l'électron est lâché dans le noyau, il y reste.
- A.2.1.1 Utiliser l'hypothèse selon laquelle le milieu est neutre avant la perturbation.

Partie B

- B.1.1.b Utiliser le principe d'Huygens-Fresnel pour calculer l'amplitude diffractée, exactement comme pour un réseau en transmission.
- B.2.2.c La combinaison des deux réseaux permet de séparer spatialement les différentes fréquences du signal incident.
- B.2.3.b Faire un développement limité par rapport à θ et ω .
- B.2.3.d Utiliser la relation $\Delta\omega = 2/\tau$.
- B.3.3 L'onde ne peut se propager dans le milieu que si son vecteur d'onde est réel.
- B.3.3.a Remarquer que le terme d'ordre 2 n'est pas négligeable, il faut donc en tenir compte dans les calculs. Raisonner ensuite sur les composantes spectrales avant de reconstruire le profil temporel en prenant la transformée de Fourier inverse. D'autre part il est nécessaire d'utiliser la formule de l'énoncé avec c_1 complexe.

PARTIE A

A.1 Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

A.1.1.1 La densité volumique de charge dans le noyau vaut

$$\rho = \frac{3q_e}{4\pi a_0^3} = 3,1 \cdot 10^{11} \text{ C.m}^{-3}$$

A.1.1.2 On utilise le théorème de Gauss pour calculer \vec{E}_{at} . La symétrie sphérique de la distribution impose

$$\vec{E}_{\text{at}} = E_{\text{at}}(r) \vec{e}_r$$

L'application du théorème de Gauss conduit à

$$\oiint \vec{E}_{\text{at}} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E_{\text{at}}(r) = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

où Q_i est la charge intérieure à la sphère de Gauss ; d'où

$$\vec{E}_{\text{at}}(r) = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Distinguons deux cas :

- si $r \leq a_0$ alors

$$Q_i = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{q_e r^3}{a_0^3}$$

$$\vec{E}_{\text{at}}(r) = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3} \vec{r}$$

- si $r \geq a_0$ alors

$$Q_i = q_e$$

$$\vec{E}_{\text{at}}(r) = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

En dehors de l'atome, le champ électrique est analogue à celui créé par une charge ponctuelle à l'origine des coordonnées.

A.1.2.1 On note \vec{r} la position de l'électron. Si $\|\vec{r}\| \leq a_0$ alors l'électron est à l'intérieur de la sphère et ressent une force

$$\vec{F}_{\text{at-e}} = -q_e \vec{E}_{\text{at}} = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3} \vec{r}$$

$\vec{F}_{\text{at-e}}$ est de la forme $\vec{F}_{\text{at-e}} = -k \vec{r}$; c'est donc une force de rappel élastique.

Ceci explique la dénomination « modèle de l'électron élastiquement lié » donnée généralement au modèle de Thomson.

A.1.2.2 Numériquement

$$\|\vec{F}_{\text{at-e}}\| = 4,6 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

A.1.2.3 Appliquons le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel lié au noyau, supposé galiléen, et on a l'équation du mouvement

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m} \vec{r} = \vec{0}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ qui s'intègre immédiatement en

$$\vec{r}(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x$$

A.1.3.1 Après application d'un champ extérieur \vec{E}_a , la somme des forces appliquées sur l'électron vaut

$$\vec{F}_{\text{totale}} = \vec{F}_{\text{at-e}} + \vec{F}_a = q_e E_{\text{at}}(r) \vec{e}_x - q_e E_a \vec{e}_x$$

Le champ électrique atomique est maximal pour $r = a_0$. Par conséquent, on ne peut avoir un état lié que si

$$E_a \leq E_{\text{at}}(a_0) = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2}$$

Si cette condition est remplie, deux positions d'équilibre sont possibles : l'une à l'intérieur du noyau, l'autre à l'extérieur. Or le potentiel étant décroissant à grande distance, la position d'équilibre externe est instable. Il ne reste que la position interne que l'on trouve en égalisant la force de rappel élastique et la force électrique extérieure :

$$\vec{r}'_0 = -\frac{q_e E_a}{k} \vec{e}_x$$

A.1.3.2 Numériquement $E_{a,\text{max}} = 5,8 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$

A.1.3.3 Le barycentre de la charge positive se trouve au centre du noyau

$$\vec{p} = -q_e \vec{r}'_0$$

donc

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a_0^3 \vec{E}_a$$

résultat **indépendant** de l'origine des coordonnées.

A.1.3.4 La polarisabilité électronique α est homogène à un volume, qu'on doit comparer au seul volume typique du problème, à savoir le volume V de l'atome. Pour l'atome de Thomson, $V = 4/3\pi a_0^3$ et on a

$$\alpha = 4\pi a_0^3 = 3V = 1,6 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$$

A.1.4.1 L'équation du mouvement devient

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r} - \frac{q_e}{m} \vec{E}_a$$