X Maths 1 MP 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Fabrice Mathurin (ENS Cachan) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose l'étude d'applications linéaires sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes (donc de dimension infinie). Il s'articule en trois parties.

- Dans la première partie, on étudie deux applications linéaires A_n et B_n très simples sur l'espace E_n des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et on identifie précisément l'image de A_n. Seule la dernière question est difficile.
- Dans la deuxième partie, on étudie les endomorphismes A et B que A_n et B_n induisent sur l'espace E des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$; on cherche notamment à exprimer de manière simple les puissances et les produits de ces endomorphismes. Les résultats sont ensuite utilisés pour la recherche du noyau et de l'image de ces applications.
- Enfin, dans la dernière partie, on étudie les endomorphismes induits par A et B sur un sous-espace de l'ensemble E' des formes linéaires sur E.

Ce sujet peut paraître simple mais comporte en fait plusieurs difficultés. Dans les deux premières parties, moins difficiles, il faut faire bien attention à rédiger correctement les questions. Au cours de la troisième partie, il faut avoir une bonne habitude de l'espace des formes linéaires. De plus, les notations de l'énoncé, sans être particulièrement mal choisies, font qu'il est facile de perdre de vue le type d'objet manipulé. Pourtant, les réponses sont souvent plus simples que l'on pense et, parfois, nécessitent uniquement de se rappeler le résultat d'une question précédente.

À ce propos, le sujet est loin d'être composé de parties indépendantes. On utilise très souvent des résultats prouvés un peu auparavant, sauf pour quelques questions (comme la 12). Par exemple, si l'on arrive à résoudre la question 7.a, assez difficile, le reste de la partie en découle immédiatement. Mais l'énoncé de la question n'est pas assez précis pour que l'on se permette d'admettre le résultat pour continuer. On peut ainsi difficilement s'autoriser à sauter des étapes.

Le sujet est original et permet de manipuler des objets qui ne sont pas courants dans les sujets de concours : l'espace des formes linéaires et les applications linéaires en dimension infinie.

Indications

Première partie

2.a Utiliser le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.

2.b Calculer $(\mathrm{A}_n f)^{(k)}$ et $(\mathrm{B}_n f)^{(k)}$ pour une fonction f donnée et tout entier k, puis majorer grossièrement.

3 Pour le produit $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n$, calculer la dérivée de $\mathrm{A}_n f$ pour une fonction f donnée puis intégrer par parties. Pour le produit $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$, supposer dans un premier temps x non nul et calculer explicitement l'intégrale $\mathrm{B}_n f$.

4.a Pour montrer que F_n est incluse dans l'image de A_n, considérer g dans F_n. Appeler ℓ la limite de $g(x)/x$ en 0 et définir f continue telle que $\mathrm{A}_n f = g$.

4.b Calculer $(\mathrm{A}_n f)^{(n)}$ pour f donnée.

4.c Utiliser la représentation intégrale de $\mathrm{B}_n f$ et un changement de variable pour obtenir une expression de $(f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0))/x$ sous forme d'une intégrale de $(g^{(n)}(u) - g^{(n)}(0))/u$. Utiliser alors le fait que cette dernière quantité a une limite finie en 0.

Deuxième partie

5.a Introduire $h : x \mapsto x/(1+x)$. Montrer que h est croissante et sous-additive c'est-à-dire que

$$\forall x, y \qquad h(x+y) \leqslant h(x) + h(y)$$

5.b Montrer que si $\delta(f - f_i)$ tend vers 0 alors pour tout entier n, $\pi_n(f)$ tend vers 0. Pour la réciproque, utiliser le fait que la fonction h de l'indication précédente est majorée par 1 et que la série $\sum 2^{-n}$ est convergente.

6.a Montrer que A est injective avec pour image les fonctions nulles en 0. Montrer que B est surjective avec pour noyau les fonctions constantes.

7.a Utiliser le théorème de Fubini. La fonction φ_n solution est l'application $t \mapsto (1-t)^{n-1}/(n-1)\,!$.

8 Montrer que l'image de A^n est l'ensemble des fonctions dont les $n-1$ premières dérivées en 0 sont nulles. Montrer que le noyau de B^n est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré au plus $n-1$.

Troisième partie

9 Montrer que si $\delta(f - f_i)$ tend vers 0, alors de même $\delta(\mathrm{A}f - \mathrm{A}f_i)$ et $\delta(\mathrm{B}f - \mathrm{B}f_i)$ tendent vers 0.

10 Utiliser le résultat de la question 6.a pour montrer que A' est surjective et B' injective. Utiliser ensuite le résultat de la question 7.c.

11 Utiliser le résultat de la question 7.c.

12 Montrer que, pour tout élément x_i de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{U}_i$, on a $\mathrm{U}_1 \cdots \mathrm{U}_r(x_i) = 0$. Pour l'inclusion réciproque, remarquer que si x est un élément de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{U}_1 \cdots \mathrm{U}_r$, alors $\mathrm{U}_2 \cdots \mathrm{U}_r(x)$ est un élément de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{U}_1$ et utiliser les hypothèses.

13.a Utiliser le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

13.b Poser $\mathrm{Q} = \prod\limits_{k=1}^{r} (x - \alpha_i)^{m_i}$ et utiliser le résultat de la question 12 appliqué à la famille d'endomorphismes $\mathrm{T}'_{(x-\alpha_i)^{m_i}}$.

Première partie

1 Soient p et n deux entiers naturels. Notons f_p la fonction $x \mapsto x^p$. Si k est inférieur ou égal à p, alors

$$f_p{}^{(k)}(x) = p(p-1)\cdots(p-k+1)\,x^{p-k} = \frac{p\,!}{(p-k)\,!}\,x^{p-k}$$

Par définition de la norme, on trouve alors

$$\left|\left|f_p{}^{(k)}\right|\right| = \frac{p\,!}{(p-k)\,!}$$

étant donné que pour tout élément x de l'intervalle $[\,-1\,;1\,]$, on a $\left|x^{p-k}\right| \leqslant 1$ avec égalité lorsque x est égal à 1. Si k est strictement supérieur à p, alors

$$f_p{}^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{et donc} \qquad \left|\left|f_p{}^{(k)}\right|\right| = 0$$

Par conséquent, on distingue deux cas pour la valeur de $\pi_n(f_p)$:

$$\boxed{\text{Si } n \leqslant p, \text{ alors } \pi_n(f_p) = \frac{p\,!}{(p-n)\,!} \text{ et sinon } \pi_n(f_p) = p\,!.}$$

2.a Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Il est clair que $(\mathrm{A}_n f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Par ailleurs, si g est de classe $\mathcal{C}^n$ avec n supérieur à 1, la fonction g' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et la fonction de deux variables

$$h : (x,t) \mapsto g'(xt)$$

est également de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur le domaine $[\,-1\,;1\,] \times [\,0\,;1\,]$. Sur ce compact, h est bornée car continue ainsi que toutes ses $n-1$ premières dérivées partielles par rapport à x. Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, il existe un réel M_k tel que

$$\forall (x,t) \in [\,-1\,;1\,] \times [\,0\,;1\,] \qquad \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|t^k \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{M}_k$$

En particulier, puisqu'une fonction constante est intégrable, en vertu du théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\mathrm{B}_n g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée vaut

$$(\mathrm{B}_n g)'(x) = \int_0^1 t g''(xt)\,\mathrm{d}t$$

De la même manière, on peut alors appliquer à nouveau le théorème pour montrer que cette fonction est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et donc que $\mathrm{B}_n g$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et ainsi de suite jusqu'à montrer qu'elle est en fait de classe $\mathcal{C}^{n-1}$. Ainsi, pour toutes fonctions g de E_n avec $n \geqslant 1$ et f de E_n,

$$\boxed{(\mathrm{A}_n f) \text{ appartient à } \mathrm{E}_n \text{ et } (\mathrm{B}_n g) \text{ appartient à } \mathrm{E}_{n-1}.}$$

2.b Soient n un entier naturel et f un élément de E_n. Il est clair que A_n est linéaire et le résultat de la question précédente assure que c'est un endomorphisme de E_n. Par une récurrence immédiate (ou en appliquant la formule de Leibniz), pour tout entier k,

$$(\mathrm{A}_n f)^{(k)}(x) = x f^{(k)}(x) + k f^{(k-1)}(x)$$

D'autre part, la définition de π_n entraîne que pour tout entier k compris entre 0 et n,

$$\forall x \in [\,-1\,;1\,] \qquad \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \pi_n(f)$$

On a alors pour tout réel x compris entre -1 et 1,

$$\left|(\mathrm{A}_n f)^{(k)}(x)\right| \leqslant (k+1)\pi_n(f) \qquad \text{et donc} \qquad \left|\left|(\mathrm{A}_n(f))^{(k)}\right|\right| \leqslant (k+1)\pi_n(f)$$

puis en passant au maximum sur k,

$$\pi_n(\mathrm{A}_n f) \leqslant (n+1)\pi_n(f)$$

Si f est un élément de la boule unité de (E, π_n), alors $\pi_n(f)$ est inférieur à 1 ce qui entraîne que $\pi_n(\mathrm{A}_n f)$ est inférieur à $n+1$. Par définition, on en déduit que

$$|||\mathrm{A}_n||| = \sup_{\pi_n(f)\leqslant 1} ||\pi_n\,(\mathrm{A}_n f)|| \leqslant n+1 < \infty$$

ce qui assure que A_n est continu. On prouve que la norme est exactement $n+1$ en remarquant que l'inégalité précédente est une égalité dans le cas de la fonction f_n de la question 1. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{A}_n \text{ est un endomorphisme continu de } \mathrm{E}_n \text{ de norme } n+1.}$$

Considérons maintenant n un entier supérieur ou égal à 1 et g un élément de E_n. L'application B_n est également linéaire et le résultat de la question 2.a précise que son image est incluse dans E_{n-1}. Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, le théorème de dérivation sous le signe somme assure de plus que

$$(\mathrm{B}_n g)^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k g^{(k+1)}(xt)\,\mathrm{d}t$$

et une majoration grossière donne pour tout réel x élément de $[\,-1\,;1\,]$

$$\left|(\mathrm{B}_n g)^{(k)}(x)\right| \leqslant \int_0^1 t^k \left|g^{(k+1)}(xt)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^k \pi_n(g)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi_n(g)}{k+1} \leqslant \pi_n(g)$$

En passant à la borne supérieure sur x puis au maximum sur k, on obtient alors

$$\pi_n(\mathrm{B}_n g) \leqslant \pi_n(g)$$

ce qui prouve comme précédemment la continuité de B_n. Maintenant, si l'on choisit pour g l'application $x \mapsto x$, on constate que $\mathrm{B}_n g$ est l'application constante égale à 1. Par suite, le résultat de la question 1 montre que l'inégalité précédente est une égalité pour cette fonction g particulière. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{B}_n \text{ est une application linéaire continue de } \mathrm{E}_n \text{ dans } \mathrm{E}_{n-1} \text{ de norme 1.}}$$

3 Soit f un élément de E_n. Alors

$$\mathrm{A}_n f(x) = x f(x) \qquad \text{et donc} \qquad (\mathrm{A}_n f)'(x) = x f'(x) + f(x)$$

et par conséquent,

$$(\mathrm{B}_n \mathrm{A}_n f)(x) = \int_0^1 xt f'(xt)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$$

On effectue alors une intégration par parties dans la première intégrale en dérivant la fonction $t \mapsto t$ et en intégrant $t \mapsto x f'(xt)$ dont une primitive est $t \mapsto f(xt)$. Il vient alors

$$(\mathrm{B}_n \mathrm{A}_n f)(x) = [t f(xt)]_0^1 - \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = f(x)$$