Mines Maths 2 MP 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) ; il a été relu par Arnaud Durand (ENS Cachan) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Le but de cette épreuve d'algèbre est le suivant. On se donne A et B deux matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ réelles symétriques, ainsi que la liste des valeurs propres (réelles) de chacune de ces deux matrices, que l'on note $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$. En notant $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1; \ldots; n\}$, on veut montrer la majoration suivante du déterminant de la matrice $\mathrm{A} + \mathrm{B}$:

$$\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \leqslant \operatorname*{Max}_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_{\sigma(i)}) \tag{1}$$

Cette épreuve se compose de trois parties.

- La première fait directement appel à des connaissances élémentaires du cours d'algèbre linéaire de seconde année (définitions, propriétés et théorèmes). Elle est l'occasion de démontrer des résultats qui seront utilisés par la suite. C'est sans doute l'occasion pour le correcteur de vérifier que le candidat maîtrise son cours.
- La deuxième partie est consacrée à la démonstration de l'inégalité (**1**). On y fait apparaître, par un argument de compacité suggéré par l'énoncé, une matrice symétrique B_0. On montre alors l'inégalité dans le cas où $\mathrm{A} + \mathrm{B}_0$ est inversible. Le cas où $\mathrm{A}+\mathrm{B}_0$ est singulière est traité ensuite et l'on est amené à construire deux suites bien choisies de matrices symétriques permettant de se ramener au cas précédent avant de conclure par extraction de sous-suites et passage à la limite.
- Enfin, une troisième partie, indépendante des autres (ce n'est pas indiqué au début du sujet), est consacrée à un calcul explicite, sous certaines hypothèses, de

$$\operatorname*{Max}_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_{\sigma(i)})$$

où les réels $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ peuvent être vus comme des valeurs propres de matrices symétriques dans la situation précédente.

Indications

Partie I

1 Raisonner par analyse-synthèse.

2 Exploiter le caractère creux des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Utiliser le résultat de la question précédente.

4 Utiliser le résultat admis P2.

5 Utiliser la définition de l'exponentielle d'une matrice.

6 Utiliser la définition du déterminant.

7 Mettre s en facteur dans l'expression $\mathrm{I} + s\,\mathrm{M} + \mathrm{O}(s^2)$ lorsque $s \neq 0$, puis utiliser la n-linéarité du déterminant. Ensuite, utiliser la question précédente ainsi que la relation du cours $\alpha_{n-1}(\mathrm{M}) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(\mathrm{M})$.

8 Réduire la matrice M, considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9 Adapter la démarche mise en œuvre à la question précédente.

Partie II

10 Utiliser le résultat admis P1.

11 On pourra se contenter (pourquoi ?) de montrer que $\mathcal{O}_n$ est une partie fermée et bornée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|)$.

12 Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathrm{B})$ est une partie compacte et se ramener à choisir judicieusement une fonction numérique continue sur ce compact à l'aide du résultat établi à la question 6.

13 Utiliser le résultat (**2**) de la question 5.

14 Utiliser le résultat de la question 4 ainsi que la définition de B_0.

15 Étudier le signe de $\psi_{\mathrm{T}}(s) - \psi_{\mathrm{T}}(0)$ au voisinage de 0 à l'aide du résultat de la question 13.

16 Utiliser le résultat de la question précédente et celui obtenu à la question 3.

17 Utiliser la question précédente afin d'appliquer le résultat obtenu à la question 10, pour pouvoir conclure à l'aide de la définition de B_0.

18 Appliquer le résultat de la question 9 à $\mathrm{A} + \mathrm{B}_0$, puis utiliser les résultats des questions 12 et 16.

19 Considérer deux suites vérifiant (**i**), (**ii**), (**iii**) et (**iv**), effectuer une réduction sur chacun des termes d'une des deux suites, utiliser la question 11, et extraire deux sous-suites bien choisies pour conclure par un passage à la limite.

Partie III

20 On pourra raisonner par récurrence sur n.

I. Préliminaires

1 $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour montrer l'égalité demandée, il suffit de montrer les deux égalités suivantes :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Pour démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, on considère $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\begin{cases} \mathrm{M}^t = -\mathrm{M} & \text{car} \quad \mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M}^t = \mathrm{M} & \text{car} \quad \mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

et donc $\mathrm{M} = -\mathrm{M}$, soit encore $\mathrm{M} = 0$. On en déduit

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$$

Pour démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on cherche à décomposer une matrice quelconque $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $\mathrm{M} = \mathrm{S}+\mathrm{A}$ où $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Supposons l'existence d'une telle décomposition. Celle-ci implique

$$\mathrm{M}^t = (\mathrm{S} + \mathrm{A})^t = \mathrm{S}^t + \mathrm{A}^t = \mathrm{S} - \mathrm{A}$$

et par suite
$$\begin{cases} \mathrm{M} + \mathrm{M}^t = 2\,\mathrm{S} \\ \mathrm{M} - \mathrm{M}^t = 2\,\mathrm{A} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \mathrm{S} = \dfrac{\mathrm{M} + \mathrm{M}^t}{2} \\ \mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{M} - \mathrm{M}^t}{2} \end{cases}$$

Réciproquement, si l'on pose $\mathrm{A} = (\mathrm{M} - \mathrm{M}^t)/2$ et $\mathrm{S} = (\mathrm{M} + \mathrm{M}^t)/2$, alors A est antisymétrique et S est symétrique. De plus, M est la somme de ces deux matrices.

Donc toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme d'une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, soit

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On en déduit
$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

2 Pour tout (i,j) dans $\{1;\ldots;n\}\times\{1;\ldots;n\}$, notons m_{ij} le coefficient de la matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne et E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1.

Fixons (i,j) dans $\{1;\ldots;n\}\times\{1;\ldots;n\}$. Un calcul colonne par colonne du produit ME_{ij} montre que celui-ci s'écrit

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ j^{\mathrm{e}} \text{ colonne} \end{array}$$

C'est-à-dire que la matrice ME_{ij} est nulle, sauf peut-être sa j^{e} colonne qui est composée des éléments de la i^{e} colonne de M.

La trace de cette matrice est donc la somme de $n-1$ coefficients nuls et du coefficient situé à la j^{e} ligne de la j^{e} colonne de ME_{ij}. Or ce coefficient est précisément m_{ji} ; on en déduit

$$\boxed{\mathrm{tr}(\mathrm{ME}_{ij}) = m_{ji}}$$

3 Les $\big(n(n-1)\big)/2$ vecteurs de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ que sont les $(\mathrm{E}_{ij}-\mathrm{E}_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ constituent une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. La linéarité de la trace permet alors d'affirmer que

$$\big(\forall \mathrm{T}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\quad \mathrm{tr}(\mathrm{MT})=0\big)\quad\Longleftrightarrow\quad \big(i<j\Longrightarrow \mathrm{tr}(\mathrm{M}(\mathrm{E}_{ij}-\mathrm{E}_{ji}))=0\big)$$

Or si l'on choisit (i,j) dans $\{1;\ldots;n\}\times\{1;\ldots;n\}$ avec $i<j$, alors on a, avec le résultat de la question précédente,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{M}(\mathrm{E}_{ij}-\mathrm{E}_{ji}))=\mathrm{tr}(\mathrm{ME}_{ij})-\mathrm{tr}(\mathrm{ME}_{ji})=m_{ji}-m_{ij}$$

La matrice M vérifie donc

$$\big(\forall \mathrm{T}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\quad \mathrm{tr}(\mathrm{MT})=0\big)\quad\Longleftrightarrow\quad \big(i<j\Longrightarrow m_{ij}=m_{ji}\big)$$

On en déduit que $\boxed{\text{La trace de MT est nulle pour toute matrice anti-symétrique T si et seulement si M est symétrique.}}$

4 Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application linéaire

$$\begin{array}{rcl}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\|.\|) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\|.\|)\\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}^t\end{array}$$

étant continue (car $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie n^2), par passage à la limite quand N tend vers l'infini dans l'égalité

$$\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{M}^k}{k\,!}\right)^t=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k\,!}\left(\mathrm{M}^k\right)^t=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k\,!}\left(\mathrm{M}^t\right)^k$$

on obtient l'égalité $$(e^{\mathrm{M}})^t=e^{\mathrm{M}^t}$$

On en déduit que, si $\mathrm{T}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $(e^{\mathrm{T}})^t=e^{\mathrm{T}^t}$ et donc en appliquant le résultat admis P2 appliqué aux matrices T et $-\mathrm{T}$ qui commutent, on a

$$\left(e^{\mathrm{T}}\right)^t e^{\mathrm{T}}=e^{\mathrm{T}^t}e^{\mathrm{T}}=e^{-\mathrm{T}}e^{\mathrm{T}}=e^{-\mathrm{T}+\mathrm{T}}=\mathrm{I}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{T}\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\text{ la matrice } e^{\mathrm{T}} \text{ est donc orthogonale.}}$$

5 Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $s\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} e^{s\,\mathrm{M}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(s\,\mathrm{M})^k}{k\,!}\\ &= \frac{(s\,\mathrm{M})^0}{0\,!}+\frac{(s\,\mathrm{M})^1}{1\,!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(s\,\mathrm{M})^k}{k\,!}\\ e^{s\,\mathrm{M}} &= \mathrm{I}+s\,\mathrm{M}+s^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k\,\mathrm{M}^{k+2}}{(k+2)\,!}\end{aligned}$$

La fonction $$\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\|.\|)\\ s & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}s^k\,\frac{\mathrm{M}^{k+2}}{(k+2)\,!}\end{array}$$

est la somme d'une série entière de rayon $+\infty$. Elle est en particulier continue en 0, donc bornée sur un voisinage de 0 :

$$\exists\,\mathrm{C}>0\quad\exists\,\delta>0\quad\forall\,s\in\,]-\delta\,;\delta\,[\qquad \left\|\sum_{k=0}^{\infty}s^k\,\frac{\mathrm{M}^{k+2}}{(k+2)\,!}\right\|\leqslant\mathrm{C}$$