Mines Maths 1 MP 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Arnaud Durand (ENS Cachan) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (ENS Cachan) et Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE).

Le sujet propose d'étudier le cas unidimensionnel du problème de transport de Monge : on souhaite déplacer chaque grain d'un tas de sable dont la densité linéique est $\mathrm{e}^{-u^2/2}$ de façon à obtenir un tas de densité linéique $f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$. Autrement dit, on désire que la masse du tas entre les abscisses u et $u + \mathrm{d}u$ passe de $\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ à $f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$. Lors du transport, les grains situés initialement à l'abscisse u sont déplacés vers une abscisse notée $s(u)$. Le coût du transport correspondant à l'application s est défini par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u - s(u)|^2\, \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \qquad (*)$$

Le but du problème est de trouver une fonction s qui minimise ce coût de transport et de majorer ce coût minimal par une quantité ne nécessitant pas le calcul de l'application s minimisante.

- Dans la première partie, on suppose que la fonction f intervenant dans la densité linéique d'arrivée est strictement positive. On prouve l'existence d'une fonction φ, dont on peut montrer (mais ce n'est pas proposé dans le sujet) qu'elle minimise le coût de transport défini par l'équation $(*)$. On obtient également divers résultats préliminaires qui seront utilisés par la suite.
- Le but de la deuxième partie est de majorer le coût minimal réalisé par la fonction φ à l'aide d'une quantité ne dépendant pas de φ, à savoir l'entropie de Boltzmann de f, définie ici par

$$\mathrm{E}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\ln(f(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

- La troisième partie propose enfin d'étendre le résultat de la deuxième partie au cas plus compliqué où la fonction f qui entre en jeu dans la densité linéique d'arrivée peut s'annuler.

Les questions sont très nombreuses et, pour la plupart, plus techniques que vraiment difficiles. Elles demandent au candidat de faire preuve de rigueur et de précision dans sa rédaction, car il y a souvent beaucoup d'arguments à citer pour y répondre. Les notions abordées sont principalement la théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, la convergence de suites de fonctions, et la compacité. Ce sujet est par conséquent une excellente façon de faire le point sur ces notions du programme, en particulier sur la théorie de l'intégration, qui y joue un rôle prépondérant.

Indications

I. Calculs préliminaires

1 Montrer que F_f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que sa dérivée est strictement positive.

2 Trouver une relation fonctionnelle entre F_f, F_1 et φ.

4 Dériver la relation $F_f \circ \varphi = F_1$ et prendre le logarithme.

5 Effectuer le changement de variable $u = \varphi(v)$.

6 Observer que φ^2 est croissante au voisinage de $+\infty$.

7 Pour $x > 0$ assez grand, majorer l'intégrale intervenant dans la question 6. Pour $x < 0$, adapter le résultat de la question 6, puis procéder de même.

8 Dériver $u \mapsto (u - \varphi(u))\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$.

II. Une inégalité intéressante

10 Pour l'existence de $E(f)$, majorer, pour $u \in \mathbb{R}$, $f(u)\,|\ln(f(u))|\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ en distinguant le cas où $f(u) > 1$ du cas contraire. Pour l'existence de $\Phi(f)$, utiliser le résultat de la question 7.

11 Utiliser le résultat de la question 5, avec $h : u \mapsto \ln(f(u))$.

12 Utiliser les résultats des questions 11, 9 et 4, afin de transformer l'expression de l'intégrale égale à $E(f) - \Phi(f)$.

13 Établir d'abord que, pour tout $t > 0$, on a $\ln t \leqslant t - 1$.

14 Montrer que $E(f) = \Phi(f)$ équivaut à $\varphi'(u) = 1$, pour tout réel u.

III. Extension aux fonctions positives

15 S'assurer de l'appartenance de f_n à H_0 pour considérer $E(f_n)$, puis prolonger de manière naturelle la fonctionnelle E en g, et utiliser le théorème de convergence dominée afin d'établir le résultat demandé.

16 On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x,

$$\int_{-\infty}^{\varphi_n(x)} f_n(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

Considérer une sous-suite de $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $\psi_j(x)$, puis donner la limite du membre de gauche de l'égalité figurant ci-dessus.

17 Utiliser le résultat de la question 16.

19 Si a et b sont finis, montrer que D est au plus dénombrable, en observant que $D = \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}^*} D_{1/N}$ et en utilisant le résultat de la question 18. Si a ou b est infini, considérer les points de discontinuité sur chaque intervalle $[\,k\,;k+1\,[$, où $k \in \mathbb{Z}$.

20 Utiliser le résultat de la question 16.

21 Prouver la contraposée en faisant appel au résultat de la question 16.

22 Montrer, grâce au résultat de la question 16, que si ψ_1 est continue au point x, on a $\psi_2(x) \leqslant \psi_1(x)$.

23 Utiliser le théorème de Heine.

24 Remarquer que (φ_n) converge simplement vers ψ_1 sur K. Pour $x \in \mathrm{K}$, écrire

$$|\varphi_n(x) - \psi_1(x)| \leqslant |\varphi_n(x) - \psi_1(x_{2j})| + |\psi_1(x_{2j}) - \psi_1(x)|$$

où l'élément x_{2j} convenable est donné par le résultat de la question 23. Majorer ensuite chaque terme du membre de droite en utilisant le résultat de la question 23, la croissance de φ_n et le fait que $\varphi_n(x_{2j})$ converge vers $\psi_1(x_{2j})$.

25 Observer qu'à 1/2 près (par exemple), les termes d'une suite sont tous compris à partir d'un certain rang entre la limite inférieure et la limite supérieure de ladite suite. Utiliser ensuite la croissance de φ_m, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

26 Suivre l'indication de l'énoncé en remarquant que K est un compact inclus dans l'ensemble C des points de continuité de ψ_1.

27 Montrer que le résultat de la question 13 reste vrai pour la fonction g.

I. Calculs préliminaires

1 Commençons par montrer que, pour tout $f \in \mathrm{H}$, la fonction $u \mapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie la définition de l'ensemble H_0. Prenons une fonction f de H. Par définition de ce dernier ensemble,

$$\exists \rho > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \qquad 0 < f(u) \leqslant \frac{1}{\rho} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \rho\right) u^2\right)$$

On a donc, pour tout réel u, l'encadrement

$$0 < f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2} \leqslant \frac{1}{\rho}\,\mathrm{e}^{-\rho u^2} \tag{1}$$

La fonction $g\ :\ u \mapsto \dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{e}^{-\rho u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable devant $u \mapsto 1/u^2$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. Cette dernière fonction est intégrable au voisinage de l'infini. Par conséquent, g est intégrable sur $\mathbb{R}$. De surcroît, comme f appartient à H, elle est continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $u \mapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est également continue sur $\mathbb{R}$. L'encadrement (1) et l'intégrabilité de g assurent alors qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

> Donnons une autre façon de prouver que g est intégrable. L'énoncé admet l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $v \mapsto \mathrm{e}^{-v^2/2}$ (puisqu'il est même rappelé que son intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$). On en déduit alors l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}$, grâce au changement de variable $v = \sqrt{2\rho}\,u$.

Prenons maintenant f dans l'ensemble H_0. Alors f appartient à H. D'après ce qui précède, la fonction $u \mapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $]\,{-\infty}\,;x\,]$, pour tout réel x, ce qui justifie la définition de la fonction F_f. La continuité de $u \mapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-u^2/2}$ implique en outre que F_f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}_f'(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Sachant qu'elle appartient à H, la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel x, $\mathrm{F}_f'(x) > 0$. On en déduit que F_f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur son image qui est l'intervalle

$$\left]\,\lim_{-\infty} \mathrm{F}_f\,;\lim_{+\infty} \mathrm{F}_f\,\right[$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les limites intervenant dans l'expression de l'image de F_f. D'une part,

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{F}_f(x) = 0$$

et, d'autre part, $$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{F}_f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi} \qquad \text{car } f \in \mathrm{H}_0$$

On en déduit que l'image de l'application F_f est l'intervalle $\left]\,0\,;\sqrt{2\pi}\,\right[$. On vient donc de prouver que

$$\boxed{\mathrm{F}_f \text{ est un } \mathscr{C}^1\text{-difféomorphisme strictement croissant de } \mathbb{R} \text{ sur } \left]\,0\,;\sqrt{2\pi}\,\right[.}$$