Mines Maths toutes filières 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (ENS Cachan) ; il a été relu par Emmanuel Cornet (ENS Ulm) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est constituée de deux problèmes totalement indépendants, le premier traitant d'analyse et le second d'algèbre et géométrie.

Le problème d'analyse comporte trois parties fortement liées, même s'il est possible d'avancer en utilisant certains résultats énoncés dans le sujet. On considère dans la première partie une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont on étudie la suite des dérivées successives dans la deuèxième partie. La troisième partie permet de faire le lien avec certaines séries et de calculer leurs sommes.

Ce problème ne nécessite que des techniques très classiques : résolution d'équations différentielles, développements limités, formules de récurrence, etc.

Dans le problème d'algèbre, on se place dans un espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ de dimension 3 et l'on y étudie un endomorphisme f défini par sa matrice J. Le but de la première partie est de caractériser géométriquement cet endomorphisme f. Dans la seconde partie, on diagonalise la matrice J puis l'on détermine son commutant C(J). Enfin, on étudie dans la troisième et dernière partie une suite récurrente de triangles, dont on détermine la limite en se servant des résultats de la partie précédente.

Dans ce problème également, les trois parties dépendent fortement les unes des autres. En outre, les résultats ne sont pas mentionnés explicitement dans l'énoncé, aussi se révèle-t-il plus difficile de « sauter » des questions. Ce second problème ne comporte pas non plus de difficultés insurmontables ; il faut simplement penser à privilégier l'aspect géométrique pour démontrer les propriétés d'algèbre (bi)linéaire, afin d'éviter les calculs inutiles.

Pour l'ensemble de l'épreuve, un constat s'impose : ce sujet ne pouvait pas raisonnablement être traité entièrement dans le temps imparti.

Indications

Problème d'analyse

1 Penser à la division euclidienne pour obtenir la décomposition en éléments simples de la fraction a.

2 Se ramener à l'équation $y' = a(x)y$.

3 Penser à employer (E).

4 Dériver la formule proposée pour voir apparaître la relation de récurrence.

6 Utiliser la formule de Leibniz et le résultat de la question 4.

7 Employer les résultats des questions 4 et 6.

8.a Utiliser les résultats des questions 5 et 7.

9 Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p à l'exponentielle entre 0 et 1.

11 Former plutôt la somme $\mathrm{S}_p(n+1) - (2n+1)\mathrm{S}_p(n) + n^2\mathrm{S}_p(n-1)$.

12 Effectuer une récurrence (forte) sur n en utilisant les deux questions précédentes.

13 Étudier la suite de terme général $s_n = \lim\limits_{p\to\infty} \mathrm{S}_p(n)$ et montrer qu'elle coïncide avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ grâce à la question 7.

Problème d'algèbre et géométrie

1 Remarquer que f est un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{\mathrm{E}}$.

2.a Utiliser les propriétés du produit vectoriel.

2.c Penser à la nature de f. Répondre à la question 2.d pour pouvoir traiter proprement la question 2.c.

3.b Utiliser les propriétés du nombre j.

4.a Employer les résultats des questions 1 et 2.c.

4.b Donner un sens à la matrice P et utiliser les résultats de la question précédente.

5.a Pour démontrer l'inclusion directe, étudier les images des X_i par $\mathrm{M} \in \mathrm{C}(\mathrm{J})$.

5.b Examiner les images successives de $\overrightarrow{\imath}$ par les itérés de f.

6.c Identifier les déterminants de la question précédente.

6.d Utiliser la relation $1 + j + j^2 = 0$.

7 Exprimer matriciellement les relations de récurrence entre les affixes des points de (T_n).

8 Utiliser la question 6.a.

9.a S'intéresser à l'ensemble géométrique décrit par les points $\lambda j + (1-\lambda)j^2$.

10 Étudier la suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème d'Analyse

Première partie

1 Pour pouvoir intégrer la fraction rationnelle $x \longmapsto a(x)$ sur I, il faut tout d'abord la décomposer en éléments simples. Une simple division euclidienne suffit ici : on peut écrire $2 - \mathrm{X} = (1 - \mathrm{X}) + 1$, d'où

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad a(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)+1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Comme on connaît les primitives

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} = -\ln|1-u| + \mathrm{C^{te}} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \frac{1}{1-u} + \mathrm{C^{te}}$$

sur $\mathrm{I} = \left]-\infty\,;1\right[$, on en déduit, en remarquant que $|1-u| = 1-u$ sur I, que

$$\boxed{\text{La fonction } \mathrm{A} : x \longmapsto \frac{1}{1-x} - \ln(1-x) \text{ est une primitive de } a \text{ sur I.}}$$

2 L'expression $(1-x)^2$ ne s'annulant pas sur l'intervalle I (qui ne contient pas 1), on peut alors diviser (E) membre à membre par cette quantité : l'équation différentielle devient alors

$$y' = a(x)y \qquad (\mathrm{E}')$$

Les résultats du cours sur les équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre assurent que l'équation (E′) admet pour solutions sur I les fonctions

$$y : x \longmapsto \lambda \exp\left(\int_0^x a(u)\,\mathrm{d}u\right) = \lambda \exp \mathrm{A}(x) = \frac{\lambda}{1-x}\, e^{\frac{1}{1-x}}$$

où λ est un réel (ou complexe) quelconque. Les équations (E) et (E′) étant équivalentes sur I, puisque l'on passe de l'une à l'autre en multipliant membre à membre par une expression qui ne s'annule jamais,

$$\boxed{\text{Les solutions de (E) sur I sont les fonctions } y_\lambda : x \longmapsto \frac{\lambda}{1-x}\, e^{\frac{1}{1-x}}.}$$

> Avec les notations ci-dessus, on a $y_\lambda(0) = e \times \lambda$: on peut ainsi déterminer le coefficient λ au moyen de la valeur en 0 de la solution considérée de (E). Dans la suite du problème, on s'intéressera plus particulièrement à la fonction $f = y_1$, qui est *la* solution de (E) qui prend la valeur $y = e$ en $x = 0$.

3 La fonction f est une composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I puisque $1 - x$ ne s'annule pas sur cet intervalle : elle est donc également de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et admet – ainsi que ses dérivées successives – un développement limité à tout ordre en 0. Ainsi, il existe des réels a, b et c tels que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e + ax + bx^2 + cx^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

puisque $f(0) = e$. La dérivation de ce développement fournit un développement limité à l'ordre 2 de f', à savoir

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a + 2bx + 3cx^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

> Ici, c'est le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la fonction f qui permet de dériver les développements limités terme à terme, et ce à tout ordre.

Enfin, f est solution de l'équation différentielle (E), soit

$$(1-x)^2 f' = (2-x) f \qquad (\mathbf{1})$$

On a
$$\begin{aligned}(1-x)^2 f' &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - 2x + x^2\right)\left(a + 2bx + 3cx^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} a + 2(b-a)x + (a + 3c - 4b)x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}(2-x) f &\underset{x\to 0}{=} (2-x)\left(e + ax + bx^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2e + (2a-e)x + (2b-a)x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Comme le développement limité d'une fonction en un point donné est unique, on déduit de la relation (**1**) que

$$\begin{cases} a = 2e \\ 2(b-a) = 2a - e = 3e \qquad \text{soit} \qquad b = \dfrac{3e}{2} + a = \dfrac{7e}{2} \\ a + 3c - 4b = 3c - 12e = 2b - a = 5e \qquad \text{soit} \qquad c = \dfrac{17e}{3} \end{cases}$$

par identification terme à terme, d'où

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + 2x + \frac{7x^2}{2} + \frac{17x^3}{3}\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right)}$$

> On peut également procéder par calcul direct, puisqu'on connaît l'expression de la fonction f. Néanmoins, cette méthode est moins « bonne » pour deux raisons : d'une part, elle est plus calculatoire, donc moins sûre ; d'autre part, en faisant cela, on perd de vue l'équation différentielle (E), qui est la base du problème. On a
>
> $$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \underbrace{x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)}_{u} \qquad (\mathbf{2})$$
>
> De plus, $$e^{1+u} \underset{u\to 0}{=} e \times e^u = e\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}\left(u^3\right)\right)$$
>
> Posons $u = \dfrac{1}{1-x} - 1$; alors
>
> $$u = x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
>
> donc $u^2 = x^2 + 2x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ et $u^3 = x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$ quand x tend vers 0.