X/ENS Physique PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Fourmond (ENS Ulm) ; il a été relu par Aurélien Fraisse (Université de Princeton) et Jean-Julien Fleck (ENS Ulm).

Ce sujet est axé sur les machines frigorifiques. Il se décompose en trois parties, chacune divisée en deux sous-parties. Les sous-parties A sont beaucoup plus simples que les sous-parties B correspondantes.

- La première partie se propose d'étudier un congélateur domestique « usuel ». Elle commence par une estimation phénoménologique simple de l'efficacité, puis elle enchaîne sur une modélisation thermodynamique assez réaliste. L'ensemble est classique mais peut dérouter car les questions guident très peu le candidat.
- La deuxième s'intéresse plus particulièrement aux ondes sonores. La première sous-partie est simplement une question de cours sur les ondes sonores, tandis que la suivante, beaucoup plus calculatoire, s'intéresse aux phénomènes diffusifs au cours de la propagation. On y trouve des questions quantitatives, ainsi que des raisonnements qualitatifs typiques de ce concours.
- La troisième partie fait le lien entre les deux premières, en présentant les principes d'un réfrigérateur thermo-acoustique. Elle commence par des caractérisations classiques d'ondes sonores stationnaires et enchaîne sur une étude complexe du fonctionnement d'un tel réfrigérateur. C'est la partie la plus délicate car elle comporte des questions à la fois complexes et calculatoires.

Bien que relativement peu nombreuses, les applications numériques jouent ici un rôle important – un certain nombre de questions en dépendent. Ce sujet est intéressant et formateur, car il permet de réviser la thermodynamique et les ondes sonores, en testant sa compréhension sur des exercices un peu plus ardus. Par ailleurs, on y trouve beaucoup de questions ayant trait à la diffusion thermique. Au final, ce sujet long et difficile est typique de cette épreuve commune de l'École Polytechnique et de l'ENS Cachan.

Indications

Partie I

2 On rappelle qu'un bon isolant a une conductivité de l'ordre de 10^{-2} S.I. On peut par ailleurs avoir une idée de la conductivité d'un bon conducteur à la question 45.

6 Appliquer le premier principe à un système fermé. On pourra introduire le débit volumique D et l'énergie interne massique e pour simplifier les étapes intermédiaires.

11 Déterminer la température de l'état 1, puis trouver de proche en proche les autres états.

Partie II

24 Utiliser l'équation d'Euler, la conservation de la masse et une relation entre la pression et la masse volumique. Introduire χ_{S} et linéariser.

30 Utiliser la loi de Fourier pour obtenir la chaleur échangée. Quelle est l'expression de U pour un gaz parfait ?

31 Reprendre la démarche de la question 24 ; l'équation « thermodynamique » à utiliser est maintenant celle du gaz parfait. Faire attention au fait que le déterminant d'une matrice ne s'exprime simplement que dans le cas de matrices 2×2 ou 3×3.

34 Que signifient « isotherme » et « adiabatique » en termes de λ ?

35 Considérer pour plus de simplicité une onde stationnaire ; à l'image de la question 40, considérer que tant que le fluide est en mouvement, les compressions sont adiabatiques, et que les transferts thermiques s'effectuent de manière isochore quand le fluide est au repos.

Partie III

36 Prendre v de la forme $v\,(x,t) = v_{\mathrm{m}}\,\sin\,(k_n x)\,\sin\,(\omega t)$.

37 Utiliser les résultats de la question 25.

40 Ne pas tenir compte du « en déduire » : ${\mathrm{T}'}_{\mathrm{m}}$ se calcule de la même manière que ${\xi'}_{\mathrm{m}}$. Attention, ${\xi'}_{\mathrm{m}}$ et ${\mathrm{T}'}_{\mathrm{m}}$ ne dépendent pas de ${x'}_0$.

41.b Il y a une erreur d'énoncé ; il faut bien sûr lire ${\xi'}_{\mathrm{m}}$ et non ζ_{m}.

41.e Utiliser les même suppositions qu'à la question 41.c.

42 Faire attention au fait qu'une grande partie des transferts thermiques se compensent. Utiliser les questions 25, 37, 39 et 40 pour exprimer les résultats en fonction des données de l'énoncé. Pour l'application numérique, on prendra $a_1 = a$.

43 Ne pas chercher à calculer l'efficacité. Penser plutôt à des généralités thermodynamiques.

44 Les facteurs ${\xi'}_{\mathrm{m}}$ et ${\mathrm{T}'}_{\mathrm{m}}$ varient maintenant en fonction de L_1. Il est facile de réutiliser le résultat de la question 42 en y substituant la nouvelle valeur de ${\xi'}_{\mathrm{m}}/\xi_{\mathrm{m}}$ et ${\mathrm{T}'}_{\mathrm{m}}/\mathrm{T}_{\mathrm{m}}$.

47 En guise d'évaluation, donner simplement une condition du type $a_1 \ll \mathrm{A}$. Cette condition traduit l'hypothèse $\mathrm{T}(\mathrm{M},t) = \mathrm{T}(x,t)$.

48 Remarquer que l'on a implicitement supposé dans la partie B que la capacité calorifique d'une tranche de métal est beaucoup plus grande que celle d'une tranche de gaz.

I. Étude d'un congélateur

A. Évaluation simple de l'efficacité

1 Dans le cas où l'épaisseur de la paroi du congélateur est constante, le volume utile vaut

$$\mathrm{V_{utile}} = (\mathrm{H} - 2e)(\mathrm{P} - 2e)(\mathrm{L} - 2e)$$

$$\mathrm{V_{utile}} = \mathrm{HPL} - 2e\,(\mathrm{HP} + \mathrm{PL} + \mathrm{HL}) \qquad (\text{puisque } e \ll \mathrm{H}, \mathrm{P}, \mathrm{L})$$

d'où

$$\boxed{e = \frac{\mathrm{HPL} - \mathrm{V_{utile}}}{2\,(\mathrm{HP} + \mathrm{PL} + \mathrm{HL})} = 6\ \mathrm{cm}}$$

> La supposition $e \ll \mathrm{H}, \mathrm{P}, \mathrm{L}$ est donc justifiée. De plus, même si la résolution de l'équation du troisième degré qui donne e sans approximation est possible, elle est particulièrement calculatoire.

2 Pour retrouver l'unité de λ, on peut utiliser la loi de Fourier

$$\overrightarrow{\jmath} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T}$$

où $\overrightarrow{\jmath}$ est une puissance surfacique, d'unité le $\mathrm{W.m^{-2}}$. On en déduit que

$$\boxed{\lambda \text{ s'exprime en } \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}.}$$

La valeur donnée correspond à un bon isolant ; celle de la laine de verre est comparable. Pour ce qui est des matériaux plus isolants, le polystyrène expansé a une conductivité de l'ordre de 4.10^{-3} $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$. Le verre a une conductivité de l'ordre de 1 $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$, l'inox de 14 $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ et le cuivre, un des meilleurs conducteurs de chaleur, 390 $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

3 Pour évaluer la puissance thermique de ces fuites, on se place en régime permanent. L'équation de la chaleur se résume alors à

$$\Delta \mathrm{T} = 0$$

Ceci donne, compte tenu de la géométrie (plane), pour chacune des surfaces

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{T} = \frac{\theta_{\mathrm{e}} - \theta_{\mathrm{i}}}{e}\,\overrightarrow{u}$$

où $\overrightarrow{u}$ est dirigé vers l'extérieur du congélateur. On en déduit la puissance surfacique, comptée positivement si elle va de l'extérieur vers le congélateur :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{surfacique}} = -\overrightarrow{\jmath}\cdot\overrightarrow{u} = \lambda\,\frac{\theta_{\mathrm{e}} - \theta_{\mathrm{i}}}{e}$$

La puissance des fuites thermiques du congélateur vaut donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{thermique}} = 2\,(\mathrm{HP} + \mathrm{PL} + \mathrm{HL})\,\lambda\,\frac{\theta_{\mathrm{e}} - \theta_{\mathrm{i}}}{e} = 94\ \mathrm{W}}$$

4 Le congélateur consomme 0,7 kWh par jour, ce qui représente une puissance moyenne de l'ordre de

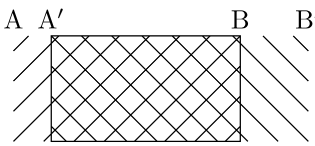
$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{consommée}} = \frac{0{,}7\ \mathrm{kWh}}{24\ \mathrm{h}} = 29\ \mathrm{W}}$$

5 En supposant que le rendement du compresseur vaut 1, l'efficacité du congélateur vaut simplement

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{thermique}}}{\mathcal{P}_{\text{consommée}}} = 3{,}2}$$

B. Modélisation du cycle de fonctionnement de la machine frigorifique

6 Appliquons le premier principe au système fermé composé de la masse m de fluide comprise entre les points A et B au moment t ; suivons son évolution entre t et $t + \mathrm{d}t$, où le fluide occupe l'espace entre A′ et B′. Le travail et la chaleur échangés valent



$$\delta \mathrm{W} = w\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \delta \mathrm{Q} = q\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t$$

où D est le débit massique dans le circuit.

Par ailleurs, comme le fluide est supposé être en régime permanent, les grandeurs massiques sont constantes au cours du temps en un point donné ; la variation de l'énergie interne vaut donc

$$\mathrm{dU} = \mathrm{U}(t + \mathrm{d}t) - \mathrm{U}(t) = e(\mathrm{B})\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t + \mathrm{U_c} - e(\mathrm{A})\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t - \mathrm{U_c}$$

où $\mathrm{U_c}$ est l'énergie interne de la partie commune aux deux instants, et e est l'énergie interne massique. On peut donc écrire le premier principe sous la forme

$$\mathrm{dU} = \delta \mathrm{W} + \delta \mathrm{Q}$$

c'est-à-dire
$$e(\mathrm{B})\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t - e(\mathrm{A})\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t = w\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t + q\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t$$

> La notation logique pour l'énergie interne massique serait u, mais cette notation est réservée par l'énoncé pour le volume massique.

En tenant compte du fait que $h = e + u\mathrm{P}$, on peut réécrire la relation précédente sous la forme

$$\Delta h = w + \Delta\,(u\mathrm{P}) + q$$

Ceci donne bien la relation demandée :

$$\boxed{\Delta h = w' + q \qquad \text{avec} \qquad w' = w + \Delta\,(u\mathrm{P})}$$

7 On déduit immédiatement de la question précédente

$$\boxed{w'_{12} - w_{12} = u_2 \mathrm{P}_2 - u_1 \mathrm{P}_1}$$

Si l'écoulement est lent, la transformation est quasi-statique. En reprenant le système étudié à la question précédente on peut alors séparer W_{12}, le travail échangé entre t et $t + \mathrm{d}t$, en deux termes :

- le travail fourni par le compresseur $\mathrm{W_{comp}} = w_{\mathrm{comp}}\,\mathrm{D}\,\mathrm{d}t$;
- le travail des forces de pression aux points 1 et 2 ; puisque la transformation est quasi-statique, il s'écrit

$$\mathrm{W_{pression}} = \mathrm{P}_1\,\Delta \mathrm{V}_1 - \mathrm{P}_2\,\Delta \mathrm{V}_2$$