Mines Physique 2 PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Marc Legendre (Professeur en CPGE). Il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Jean-David Picon (École Polytechnique).

Le sujet porte sur l'étude d'un matériau ayant la propriété peu commune d'avoir un indice de réfraction négatif. Il se compose de cinq parties.

- Tout d'abord, dans la première partie du problème, on étudie la propagation d'ondes planes dans un milieu diélectrique et magnétique. On définit alors, de manière très générale, la notion d'indice de réfraction négatif.
- Dans une deuxième partie, on redémontre les lois de Descartes en utilisant les relations de passage à l'interface entre deux milieux différents. On peut alors affiner la définition d'un milieu d'indice négatif. Ces deux parties sont proches du cours d'électromagnétisme même si la notion d'indice négatif a pu dérouter certains candidats.
- On étudie ensuite géométriquement cette notion dans une troisième partie, à l'aide notamment de connaissances acquises en première année. On vérifie ainsi que le candidat a assimilé les bases de l'optique géométrique et qu'il est capable de les appliquer dans un cadre original.
- Dans la quatrième partie, un modèle microscopique est proposé pour justifier la définition établie dans la partie I. Une bonne connaissance du cours d'électromagnétisme est alors nécessaire.
- Une critique de ce modèle est suggérée dans la dernière partie, qui utilise les notions d'électromagnétisme étudiées dans le cours de première année.

Ce sujet est assez long mais la difficulté principale réside dans la compréhension de l'énoncé, qui est parfois obscur. Même si l'ensemble peut paraître déroutant, de nombreuses questions sont très abordables si l'on prend soin de bien lire le texte.

Indications

Partie I

3 Se rappeler qu'on définit le rayon lumineux à l'aide du vecteur de Poynting.

Partie II

5 Utiliser la continuité de la composante tangentielle du champ électrique.

8 Utiliser le fait que $\langle \overrightarrow{\mathrm{S}} \rangle$ et $\overrightarrow{k}$ sont opposés dans le milieu négatif.

Partie III

9 Regarder la figure de la première page de l'énoncé.

10 Faire attention au signe des valeurs algébriques.

12 Faire un schéma.

Partie IV

13 Se rappeler la définition de $\overrightarrow{\jmath} = -\mathrm{N}e\,\overrightarrow{v}$.

15 Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{B}}_\infty$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_\theta}$.

16 Utiliser l'équation de Maxwell-flux $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{0}$.

23 Considérer d'abord que la grandeur ε_H est réelle puis qu'elle est négative.

24 Calculer la densité d'électrons à l'aide du paramètre de maille du réseau cubique.

Partie V

26 Considérer un élément infinitésimal de fil, de longueur $\mathrm{d}z$.

27 Calculer le champ créé par la charge $q(t)$ en utilisant la notion d'angle solide rappelée en annexe. Utiliser alors l'équation intégrale de Maxwell-Ampère (il y a une erreur dans l'annexe).

I. Ondes planes dans un matériau homogène

1 L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

En convention $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$, on a alors, comme il l'est rappelé dans l'annexe,

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial t} = \mathrm{i}\,\omega\,\underline{f} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\nabla} = -\mathrm{i}\,\overrightarrow{k}$$

L'équation s'écrit alors $\qquad -\mathrm{i}\,\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = -\mathrm{i}\,\omega\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}}$

On en déduit $\qquad \boxed{\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}} = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}}{\omega} = -\frac{k\,\mathrm{E}_0}{\omega}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_x}}$

La valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est

$$\langle\,\overrightarrow{\mathrm{S}}\,\rangle_t = \langle\,\overrightarrow{\mathrm{E}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{H}}\,\rangle_t = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{H}}}^*\right)$$

Or, $\qquad \overrightarrow{\mathrm{H}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mu} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\underline{\mathrm{H}}} = -\frac{k\,\mathrm{E}_0}{\omega\mu}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_x}$

Il vient alors, avec $\overrightarrow{k} = k\,\overrightarrow{u_z}$,

$$\boxed{\langle\,\overrightarrow{\mathrm{S}}\,\rangle_t = \frac{{\mathrm{E}_0}^2}{2\,\mu\,\omega}\,\overrightarrow{k}}$$

Le vecteur de Poynting représente le vecteur densité de flux d'énergie électromagnétique. Il définit le trajet du rayon lumineux de l'onde électromagnétique associée. Avec $\mu > 0$, la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est de sens et de direction identiques à ceux de $\overrightarrow{k}$.

2 L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, en l'absence de courants de conduction,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \frac{\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mu} = \varepsilon\,\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

Dérivons cette équation par rapport au temps. Il vient alors

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}\right) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2}$$

On a de plus, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{B}}}{\partial t}\right) = -\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}})$$

d'où $\qquad -\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{E}}) = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2}$

En l'absence de charges libres, l'équation de Maxwell-Gauss implique

$$\text{div } \overrightarrow{\text{D}} = 0 \quad \text{d'où} \quad \text{div } \overrightarrow{\text{E}} = 0$$

Il vient
$$-\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{E}}) = \Delta\overrightarrow{\text{E}} - \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div }\overrightarrow{\text{E}}) = \Delta\overrightarrow{\text{E}}$$

Finalement, l'équation de propagation s'écrit

$$\Delta\overrightarrow{\text{E}} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\overrightarrow{\text{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

La célérité v de l'onde dans le milieu est telle que :

$$\Delta\overrightarrow{\text{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{\text{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

Par identification,
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}$$

D'autre part, dans le vide, la célérité de l'onde est

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}$$

On déduit de ces deux équations l'indice du matériau défini par $n = \dfrac{c}{v}$,

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}}$$

d'où
$$\boxed{n = \sqrt{\mu_r\,\varepsilon_r}}$$

3 Les relations démontrées dans les deux questions précédentes ne dépendent pas du signe de ε et μ et restent donc valables. En particulier, l'équation de d'Alembert et l'expression de l'indice de réfraction du milieu sont inchangées. En revanche, si μ est négatif, la relation exprimant $\langle\,\overrightarrow{\text{S}}\,\rangle_t$ en fonction de $\overrightarrow{k}$ montre que ces deux vecteurs sont opposés.

Le sens de propagation de l'onde est défini par le sens de propagation de l'énergie, c'est-à-dire du vecteur de Poynting. Celui-ci définit le rayon lumineux associé à l'onde électromagnétique.

> Habituellement, le sens de propagation de l'onde est défini par le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$. Ici, il faut comprendre « sens de propagation du rayon lumineux ». Le fait que le rayon lumineux soit opposé au vecteur d'onde est exceptionnel et est à l'origine de l'indice optique négatif. Cette remarque est essentielle pour la compréhension de la suite du problème.