Mines Physique 1 PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Fourmond (ENS Ulm) ; il a été relu par Daniel Jost (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet est divisé en deux parties totalement indépendantes dont le fil conducteur est l'étude physique de quelques phénomènes biologiques.

- La première partie traite du sang et d'une modélisation des écoulements dans les veines, puis de l'approvisionnement d'un organe ; on y trouvera aussi bien des raisonnements par ordre de grandeur que des calculs plus poussés. Cette partie permet de faire un bilan de ses connaissances sur la viscosité et de réviser les bilans de matière.
- La deuxième décrit une méthode utilisant des ultrasons pour détecter une pathologie osseuse du pied. Elle comporte quelques calculs et surtout beaucoup d'évaluations numériques. C'est une bonne révision du cours sur les ondes sonores.

Le sujet dans sa globalité est tout à fait accessible et ne devrait pas poser trop de problèmes. Les questions sont dans l'ensemble bien guidées et proches du cours. Cette épreuve peut tout à fait être résolue dans le temps imparti et constitue par suite un bon entraînement à la rédaction en temps limité.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I

2 Utiliser l'hypothèse d'un fluide incompressible : div $\overrightarrow{v} = 0$.

3 Après simplification de l'équation de Navier-Stokes, remarquer que l'on peut séparer ses termes en un membre ne dépendant que de z et un autre ne dépendant que de r.

4 Dans l'intégration de la relation amenant à v_z, éliminer la constante d'intégration donnant lieu à un terme logarithmique grâce à une considération physique.

7 Remarquer que Q est précisément la section multipliée par la vitesse moyenne.

10 Appliquer deux fois la formule donnée dans l'énoncé, en faisant bien attention aux orientations pour les angles.

11 dn est la quantité de molécules émettant une fréquence comprise entre f'' et $f''+\mathrm{d}f''$. Le spectre est quant à lui la quantité d'énergie reçue pour une fréquence comprise entre f'' et $f''+\mathrm{d}f''$.

12 L'énoncé annonce une valeur largement surestimée.

Partie II

17 Calculer la divergence de l'équation d'Euler et linéariser l'équation locale de conservaton de la masse.

18 Utiliser l'équation d'Euler.

20 Utiliser la question 19 pour obtenir p_m, puis exprimer tout le reste en fonction de p_m.

22 On peut démontrer (ou simplement regarder à la question suivante) que le coefficient de transfert en énergie ne dépend pas du sens dans lequel on traverse l'interface.

23 Il est facile d'établir une relation linéaire entre les différents paramètres. Faire ensuite une régression linéaire sur les données de l'énoncé.

24 Utiliser la dérivée logarithmique pour obtenir l'erreur relative.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I. Quelques aspects de la circulation sanguine

1 Le volume sanguin d'un adulte est de l'ordre de **5 litres**. Une particule de fluide est un petit élément de fluide qu'on considère homogène et dont on peut suivre l'évolution. Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante indépendamment des conditions qui lui sont imposées. Un écoulement est dit incompressible s'il vérifie div $\overrightarrow{v} = 0$ en tout point.

> Il faut bien comprendre qu'un écoulement peut être incompressible sans que le fluide en question le soit ; c'est une contrainte moins forte. Par exemple, un écoulement qui modéliserait du vent est incompressible car l'air n'y change pas de densité, alors que l'air n'est pas un fluide incompressible.

Un écoulement laminaire est un écoulement qui présente des variations spatiales et temporelles modérées correspondant à une distribution de vitesses bien ordonnée. En revanche, un écoulement turbulent est un écoulement qui présente une structure macroscopique mais aussi de fortes variations temporelles et spatiales aux petites échelles.

> La notion de champ de vitesse est délicate dans le cas d'écoulements turbulents, tout d'abord parce qu'il n'est pas possible de mesurer un champ de vitesse avec une résolution spatiale arbitraire ; on n'a donc pas toujours accès aux petites échelles – ou plus difficilement. De plus, dans certains cas, on doit recourir à une description statistique du champ de vitesse. Le traitement le plus rigoureux possible fait intervenir la probabilité pour qu'une particule (au sens atomique) du fluide ait une position et une quantité de mouvement données.

Le nombre de Reynolds mesure l'importance des effets convectifs par rapport aux effets diffusifs. Il vaut

$$\mathcal{R}_{\mathrm{e}} = \frac{\rho\, v\, d}{\eta}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, d est une dimension caractéristique « transverse » au champ de vitesse, v est la vitesse caractéristique de ce champ et η est la viscosité dynamique du fluide.

> Il convient de remarquer que le nombre de Reynolds est adimensionné et constitue en ce sens une réelle caractérisation de l'écoulement. Les physiciens essaient toujours d'extraire des nombres adimensionnés des problèmes, pour pouvoir aboutir à des classes de solutions ou du moins de méthodes de résolution. Par exemple, un écoulement à bas nombre de Reynolds ne se traitera pas du tout de la même façon qu'un écoulement à haut nombre de Reynolds.

On considère qu'un écoulement est laminaire si son nombre de Reynolds est inférieur à une valeur proche de 2 000, et turbulent dans le cas contraire.

> La véritable valeur de transition est un peu floue et dépend énormément de la géométrie du problème, mais 2 000 est une bonne estimation.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

2 L'écoulement du sang dans un vaisseau est de la forme $\overrightarrow{v} = v_z(r,\theta,z)\widehat{\boldsymbol{z}}$. Puisque le système considéré est invariant par rotation autour de l'axe (Oz), $\overrightarrow{v}$ est nécessairement indépendant de θ. On écrit la conservation de la masse,

$$\mathrm{div}\,(\rho\,\overrightarrow{v}\,) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

et, comme on est en régime permanent et que le fluide est incompressible (ρ est constant), elle se simplifie en

$$\rho\,\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$\overrightarrow{v}$ est donc également indépendant de z, ce qui laisse

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v_z(r)\,\widehat{\boldsymbol{z}}}$$

3 Réécrivons l'équation de Navier-Stokes en tenant compte des hypothèses :

$$\rho\,(\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\,v_z(r)\widehat{\boldsymbol{z}} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p + \eta\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)\widehat{\boldsymbol{z}}$$

> Rappelons que, puisque l'écoulement est stationnaire, les dérivées temporelles sont nulles.

Ainsi,
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p = \left(\eta\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) - \rho\,(\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\,v_z(r)\right)\widehat{\boldsymbol{z}}$$

Puisque le second membre de cette équation est porté uniquement par $\widehat{\boldsymbol{z}}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;p$ l'est aussi. On peut alors écrire, en projetant sur $\widehat{\boldsymbol{r}}$,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

En conséquence, $\boldsymbol{p}$ **ne dépend que de** $\boldsymbol{z}$. Puis, en écrivant $p = p(z)$, on aboutit, en projetant sur $\widehat{\boldsymbol{z}}$, à l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) - \rho(\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)v_z(r)$$

Comme $\overrightarrow{v}$ est selon $\widehat{\boldsymbol{z}}$ et son gradient est selon $\widehat{\boldsymbol{r}}$, le terme $(\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)v_z(r)$ est nul.

> Une preuve plus mathématique de cette affirmation serait de passer en coordonnées cartésiennes, les seules où cet opérateur a une forme simple. On sait alors que $\overrightarrow{v}$ est porté par $\widehat{\boldsymbol{z}}$ et ne dépend que de x et y. Par conséquent,
>
> $$(\,\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\,\overrightarrow{v} = \left(v_z\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\overrightarrow{v}(x,y) = \overrightarrow{0}$$

On aboutit finalement à
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)$$

Or, le terme de gauche ne dépend que de z et le terme de droite ne dépend que de r ; ils sont donc tous deux égaux à une constante k. On obtient bien

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = k \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{k}{\eta}}$$