Mines Maths 2 PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Chevalier (ENS Ulm) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (ENS Cachan) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

L'épreuve qui est présentée ici correspond à l'étude de multiples propriétés analytiques et algébriques à partir de deux suites récurrentes linéaires connues en mathématiques sous le nom de *suites de Fibonacci* — le terme n'est cependant pas utilisé dans l'énoncé, sans doute pour ne pas troubler les candidats puisqu'aucune connaissance préalable sur ces suites n'est nécessaire.

Notons que quand on parle, usuellement, de *la* suite de Fibonacci au singulier, il s'agit de la suite notée F dans le problème.

Les différents points de vue choisis successivement font intervenir de manière clef une suite de matrices $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, construite à partir des deux suites réelles étudiées. Le problème consiste donc essentiellement en l'étude de propriétés de cette suite de matrices, et en particulier de son deuxième terme $\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}$.

- L'objectif de la première partie est d'obtenir des résultats préliminaires sur les matrices U_n et certains polynômes qui les annulent.
- La deuxième partie étudie des suites et séries extraites de celles de la première partie – telles que la somme des termes d'indice pair de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – en utilisant des propriétés que l'on obtient grâce à l'étude des matrices.
- La démonstration de propriétés remarquables des séries entières construites à partir des suites étudiées est abordée dans la troisième partie.

Ce problème, qui consiste à évoquer de multiples aspects des suites en question, n'aboutit pas à un résultat réllement important ; il se présente plutôt comme une suite d'exercices très dépendants les uns des autres. En particulier, les résultats de la première partie sont utilisés de manière intensive dans toute la suite du problème.

Dans l'ensemble, cette épreuve est de difficulté moyenne et ne fait pas beaucoup appel au cours, mais permet de s'entraîner à manipuler des notions utiles telles que les suites et séries, les matrices, leurs déterminants et leurs polynômes caractéristiques.

Indications

Première partie

1 Calculer J^2 et raisonner par récurrence.

5 Utiliser le résultat de la question 3.

6 Penser à utiliser le polynôme caractéristique.

7 Faire intervenir dans le calcul un terme $+f_n\mathrm{X}^2 - f_n\mathrm{X}^2$ pour retrouver une somme de deux termes dont chacun vérifie le critère de divisibilité demandé.

11 Ne pas oublier que dans un premier temps, on sait simplement que le degré de $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ est inférieur ou égal à 1.

Deuxième partie

12 La somme des U_{2k} peut être vue comme la somme d'une suite géométrique de matrices, de raison U^2.

14 Le polynôme utilisé est celui de la question 11 avec $n = 3$.

16 Introduire les deux suites $h_n = f_{3n}$ et $k_n = g_{3n}$ puis chercher T par combinaison linéaire.

Troisième partie

17 Raisonner d'abord avec $\mathrm{U} - \mathrm{X}\cdot\mathrm{I}$ puis avec $\mathrm{I} - x\mathrm{U}$ pour $x = 1/\mathrm{X}$.

18 Se placer, après l'avoir justifié, dans une base dans laquelle la matrice U est diagonale, et raisonner avec les valeurs propres.

20 Résoudre le problème en termes d'éléments de E exprimés dans la base (I, J) puis identifier les coordonnées.

Première partie

1 Notons M_2 l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 et

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{J} = \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 = f_1\mathrm{J} + \frac{1}{2}g_1\mathrm{I} = \mathrm{J} + \frac{1}{2}\mathrm{I}$$

Avant toute chose, calculons les premiers termes des suites F et G, le sujet donnera certainement l'occasion de s'en servir dans la suite.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34
g_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Démontrons que tous les U^n, pour n entier naturel, sont dans E, le sous-espace vectoriel de M_2 engendré par I et J.

Calculons d'abord J^2.

$$\mathrm{J}^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\,\mathrm{I}$$

$$\mathrm{J}^2 = \frac{5}{4}\cdot\mathrm{I} \in \mathrm{E} \qquad (\mathbf{1})$$

Montrons par récurrence sur n la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \mathrm{U}^n \text{ appartient à E}$$

est vraie pour tout entier naturel n.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque $\mathrm{U}^0 = \mathrm{I} \in \mathrm{E}$.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: soit n un entier non nul et supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors il existe deux réels a et b tels que $\mathrm{U}^n = a\mathrm{J} + b\mathrm{I}$. En utilisant la formule $(\mathbf{1})$ on a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{U}^{n+1} = \mathrm{U}\cdot\mathrm{U}^n &= \left(\mathrm{J} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)\cdot(a\mathrm{J} + b\mathrm{I}) = a\mathrm{J}^2 + \left(\frac{a}{2} + b\right)\mathrm{J} + \frac{b}{2}\,\mathrm{I} \\ &= \left(\frac{a}{2} + b\right)\mathrm{J} + \left(\frac{5a}{4} + \frac{b}{2}\right)\mathrm{I}\end{aligned}$$

  ce qui montre la propriété $\mathscr{P}(n+1)$.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{U}^n \in \mathrm{E}}$

> Plus généralement, E est stable par le produit matriciel, c'est-à-dire que si A et B sont dans E, alors leur produit $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ est aussi dans E. Pour démontrer cela, supposons $\mathrm{A} = a\mathrm{I} + \alpha\mathrm{J}$ et $\mathrm{B} = b\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}$ et calculons leur produit.
>
> $$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = (a\mathrm{I} + \alpha\mathrm{J})(b\mathrm{I} + \beta\mathrm{J}) = ab\mathrm{I} + \alpha b\mathrm{J} + a\beta\mathrm{J} + \alpha\beta\mathrm{J}^2$$

> Comme $\mathrm{J}^2 = \dfrac{5}{4} \cdot \mathrm{I} \in \mathrm{E}$, on a alors
>
> $$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = (ab + \frac{5}{4}\alpha\beta)\mathrm{I} + (a\beta + \alpha b)\mathrm{J} \in \mathrm{E}$$
>
> Ceci assure que E est stable par produit interne de matrices et que E est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 2.

2 On retrouve la même relation de récurrence linéaire sur la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que sur F et G. Soit n un entier. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_{n+2} &= f_{n+2}\mathrm{J} + \frac{g_{n+2}}{2}\mathrm{I} \\
&= (f_{n+1} + f_n)\mathrm{J} + \Big(\frac{g_{n+1} + g_n}{2}\Big)\mathrm{I} \\
\mathrm{U}_{n+2} &= \Big(f_{n+1}\mathrm{J} + \frac{g_{n+1}}{2}\mathrm{I}\Big) + \Big(f_n\mathrm{J} + \frac{g_n}{2}\mathrm{I}\Big)
\end{aligned}$$

soit
$$\boxed{\mathrm{U}_{n+2} = \mathrm{U}_{n+1} + \mathrm{U}_n}$$

3 Calculons avec les valeurs des premiers termes de f_n et g_n les premiers termes de la suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $\mathrm{U}_0 = f_0\mathrm{J} + \dfrac{g_0}{2}\mathrm{I} = \mathrm{I}$
- $\mathrm{U}_1 = f_1\mathrm{J} + \dfrac{g_1}{2}\mathrm{I} = \mathrm{J} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{I} = \mathrm{U}$
- $\mathrm{U}_2 = f_2\mathrm{J} + \dfrac{g_2}{2}\mathrm{I} = \mathrm{J} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{I}$

Les puissances successives peuvent être calculées en utilisant pour J^2 la formule trouvée à la première question.

- $\mathrm{U}^0 = \mathrm{I} = \mathrm{U}_0$
- $\mathrm{U}^1 = \mathrm{U} = \mathrm{U}_1$
- $\mathrm{U}^2 = \Big(\mathrm{J} + \dfrac{1}{2}\mathrm{I}\Big)^2 = \mathrm{J}^2 + \mathrm{J} + \dfrac{1}{4}\mathrm{I} = \dfrac{5}{4}\mathrm{I} + \mathrm{J} + \dfrac{1}{4}\mathrm{I} = \mathrm{J} + \dfrac{3}{2}\mathrm{I} = \mathrm{U}_2$

Notons au passage une formule utile dans la suite du problème :

$$\mathrm{U}^2 = \mathrm{J} + \frac{3}{2}\mathrm{I} = \mathrm{J} + \frac{1}{2}\mathrm{I} + \mathrm{I} = \mathrm{U} + \mathrm{I}$$

On a donc
$$\boxed{\mathrm{U}^2 - \mathrm{U} - \mathrm{I} = 0} \qquad \textbf{(2)}$$

ce qui implique que $\mathrm{U}(\mathrm{U} - \mathrm{I}) = \mathrm{I}$ donc que U est inversible et que

$$\boxed{\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U} - \mathrm{I}} \qquad \textbf{(3)}$$

Au vu de ces premiers résultats, on a bien envie que toute la suite vérifie la relation $\mathrm{U}^n = \mathrm{U}_n$. Démontrons-le par récurrence.

> Il s'agit ici d'utiliser une récurrence forte, c'est-à-dire que l'hypothèse de récurrence ne sera pas, pour un n donné, $\mathrm{U}^n = \mathrm{U}_n$, mais $\forall p \leqslant n \quad \mathrm{U}^p = \mathrm{U}_p$, car on va avoir besoin de la propriété aux rangs n et $n-1$ simultanément. Pour cette raison, on doit également faire une double initialisation de la récurrence qui va suivre en vérifiant séparément la propriété pour $n = 0$ et $n = 1$.