CCP Maths 2 PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Perrier (ENS Cachan) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Ce problème tourne autour d'une suite double vérifiant la relation de récurrence

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad a_{p+1,q+1} = a_{p,q} + (p+1)a_{p+1,q}$$

Après une étude élémentaire de cette suite, on en montre des exemples d'application.

- Dans la première partie, on calcule certains termes de la suite et on en démontre quelques propriétés. Les trois parties suivantes sont indépendantes les unes des autres mais dépendent toutes de la première.
- Dans la deuxième partie, on montre que les termes de la suite double peuvent être vus comme les coefficients des matrices de changement de base entre deux suites de bases de l'espace $\mathbb{R}[X]$.
- Dans la troisième partie, on montre que la suite double $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ peut servir à exprimer simplement les itérés d'un opérateur différentiel.
- Enfin, dans la quatrième partie, on établit que la suite $(a_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ compte le nombre de partitions en p classes d'un ensemble à q éléments. Une technique de série génératrice exponentielle permet de conclure sur le nombre de partitions d'un ensemble.

Bien que certaines questions portent sur les séries entières, la plupart des points abordés relèvent plutôt du programme de première année : suites récurrentes, équations différentielles, développements limités. N'oubliez pas que les concours portent sur les deux années de la préparation !

Indications

Partie I

I.3 Reconnaître une suite arithmético-géométrique

I.4 Il est plus simple de montrer que $\mathscr{P}_q$: « pour tout p dans $\mathbb{N}$, $a_{p,q}$ est entier » est vraie par récurrence sur q.

I.5 Raisonner par récurrence sur q.

Partie II

II.1.1 Utiliser la formule générale de développement du déterminant.

II.2.5 Utiliser la question II.1.3.

II.2.7 Montrer que les coefficients $\beta_{p,q}$ vérifient la même relation de récurrence que les $a_{p,q}$.

Partie III

III.1 Montrer que ϕ est surjectif et que le noyau de ϕ est l'ensemble des fonctions constantes.

III.5 Montrer que les réels $d_{p,q}$ vérifient la même relation de récurrence que les $a_{p,q}$.

Partie IV

IV.1.1 Composer les développements limités.

IV.2.4 Montrer que les coefficients P_p^q vérifient la même relation de récurrence que les $a_{p,q}$.

IV.3.3 Raisonner par récurrence forte sur n.

Partie I

I.1 Afin de déterminer les coefficients $a_{1,q}$, essayons d'obtenir, à l'aide de la relation de récurrence définissant la suite double $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$, une relation de récurrence sur la suite $(a_{1,q})_{q\in\mathbb{N}^2}$. On obtient

$$\forall q \geqslant 1 \qquad a_{1,q+1} = a_{0,q} + a_{1,q} = a_{1,q}$$

La suite $(a_{1,q})_{q\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante, égale à son premier terme $a_{1,1}$. Calculons celui-ci :

$$a_{1,1} = a_{0,0} + a_{1,0} = 1$$

car par hypothèse, $a_{0,0} = 1$ et $a_{1,0} = 0$. Ainsi

$$\boxed{a_{1,0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad a_{1,q} = 1}$$

I.2 On a immédiatement $\qquad a_{2,1} = a_{1,0} + 2a_{2,0}$

soit $\qquad \boxed{a_{2,1} = 0}$

et

$$\begin{aligned} a_{2,2} &= a_{1,1} + 2a_{2,1} \\ &= a_{1,1} \end{aligned}$$

d'où $\qquad \boxed{a_{2,2} = 1}$

I.3 Établissons, de manière analogue à la question I.1, une relation de récurrence sur la suite $(a_{2,q})_{q\in\mathbb{N}}$.

$$a_{2,q+1} = a_{1,q} + 2a_{2,q}$$

Or, d'après la question I.1, si $q \geqslant 1$, alors $a_{1,q} = 1$, donc

$$\forall q \geqslant 1 \qquad a_{2,q+1} = 1 + 2a_{2,q}$$

Il s'agit ainsi d'une suite arithmético-géométrique, de point fixe ℓ qui vérifie

$$\ell = 2\ell + 1$$

d'où $\qquad \ell = -1$

La suite de terme général $a_{2,q} + 1$ vérifie alors

$$\forall q \geqslant 1 \qquad a_{2,q+1} + 1 = 2\,(a_{2,q} + 1)$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison 2, et telle que $a_{2,1} + 1 = 1$, d'où l'on déduit que $a_{2,q} + 1 = 2^{q-1}$. Par conséquent,

$$\boxed{a_{2,0} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad a_{2,q} = 2^{q-1} - 1}$$

> **Rappel :** on appelle *suite arithmético-géométrique* une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
>
> $$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b$$
>
> Si $a \neq 1$, celles-ci s'étudient de la manière suivante : on en cherche le point fixe ℓ, et on peut alors montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a. Si $a = 1$, il s'agit d'une suite arithmétique.

> On aurait aussi pu calculer les premiers termes de la suite $(a_{2,q})_{q\in\mathbb{N}}$ et deviner la forme générale des termes de cette suite. Ceci aurait cependant demandé en plus la rédaction d'une récurrence.

I.4 Il y a vraisemblablement une erreur d'énoncé. Le but de cette question est de montrer que pour tout couple d'entiers (p, q), $a_{p,q}$ est entier. Ici, la relation de récurrence vérifiée par $a_{p,q}$ relie $a_{p+1,q+1}$ à $a_{p+1,q}$ et $a_{p,q}$. Il apparaît donc naturel de faire une récurrence sur q. Une récurrence sur p semble impossible à mener.

Soit $\mathscr{P}_q$ la propriété « pour tout p dans $\mathbb{N}$, $a_{p,q}$ est entier ».

- $\underline{\mathscr{P}_0}$: $a_{0,0} = 1$ et pour tout $p > 0$, $a_{p,0} = 0$, donc pour tout entier p , $a_{p,0}$ est entier et on en déduit que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathscr{P}_q \Longrightarrow \mathscr{P}_{q+1}}$: pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, on a
$$a_{p,q+1} = a_{p-1,q} + p\,a_{p,q}$$
Or, par hypothèse de récurrence, $a_{p-1,q}$ et $a_{p,q}$ sont entiers, donc $a_{p,q+1}$ est entier.
- Conclusion : pour tout q, $\mathscr{P}_q$ est vraie donc

$$\boxed{\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2 \qquad a_{p,q} \in \mathbb{N}}$$

I.5 Montrons par récurrence sur q la propriété suivante :

$$\mathscr{P}_q \;:\; \forall p > q \qquad a_{p,q} = 0$$

- $\underline{\mathscr{P}_0}$: pour tout $p > 0$, $a_{p,0} = 0$; on en déduit que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathscr{P}_q \Longrightarrow \mathscr{P}_{q+1}}$: pour tout p entier, on a
$$a_{p+1,q+1} = a_{p,q} + (p+1)\,a_{p+1,q}$$
Si $p > q$, alors par hypothèse de récurrence, $a_{p,q} = 0$ et $a_{p+1,q} = 0$ car $p+1 > q$, donc $a_{p+1,q+1}$ est nul.
- Conclusion : pour tout q, $\mathscr{P}_q$ est vraie donc

$$\boxed{\forall p > q \qquad a_{p,q} = 0}$$

I.6 D'après la relation de récurrence vérifiée par la suite $a_{p,q}$,

$$\begin{aligned} a_{p+1,p+1} &= a_{p,p} + (p+1)\,a_{p+1,p} \\ &= a_{p,p} && \text{(grâce à la question I.5)} \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(a_{p,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à son premier terme $a_{0,0}$, d'où

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \qquad a_{p,p} = 1}$$

I.7 Il a été choisi dans l'énoncé de numéroter les lignes et les colonnes en commençant par 0. Dans la suite, on désignera donc par « première ligne » la ligne 0, et par « $(p+1)^{\text{e}}$ ligne » la ligne p.