CCP Maths 1 PSI 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Joseph Salmon (ENSAE) ; il a été relu par Olivier Dudas (ENS Ulm) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Cette épreuve d'analyse se fixe l'objectif ambitieux d'étudier deux normes d'espaces fonctionnels. En fait, les deux premières parties sont consacrées à des exemples et seule la troisième traite des normes de manière frontale. Les trois parties sont indépendantes.

- Les deux premières traitent les cas des fonctions usuelles Arctan et Argsh, dont on calcule les normes N_1 et N_2. On a recourt d'abord à l'étude de fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre, puis on utilise, des séries pour le calcul explicite.

  Ces deux parties sont assez calculatoires ; elles passent en revue les principales techniques de base : développements limités, décomposition en éléments simples, intégration par parties, etc.
- La troisième partie, plus théorique, s'attache à comparer les espaces E_1 et E_2, puis les normes N_1 et N_2. Pour finir, on montre que les deux normes ne sont pas équivalentes sur E_2.

Dans l'ensemble, ce sujet est très technique et calculatoire, mais il n'est pas d'une difficulté trop élevée. Il peut être utile pour réviser tout ce qui concerne l'analyse de première année, ainsi que les intégrales : intégration par parties, intégrales à paramètre, interversion série-intégrale, changement de variable, etc.

Indications

Partie I

I.3.3 Intégrer la forme de H_x donnée à la question précédente.

I.3.4 Trouver un lien simple entre $N_2(f)$ et $\varphi(1)$.

I.5 Utiliser un équivalent de Arctan au voisinage de 0 et une majoration en $+\infty$.

I.6.1 Majorer G_x indépendamment de x et appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

I.6.4 Utiliser l'expression établie à la question précédente.

I.6.5 Faire une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^A \frac{(\text{Arctan } t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$ puis faire tendre A vers $+\infty$.

I.6.6 Utiliser les résultats des questions I.3.4 et I.6.5.

Partie II

II.4.1 Donner les équivalents de $\dfrac{-\ln(t)}{1-t^2}$ en 0 et en 1 pour justifier l'intégration sur $]\,0\,;1\,[$.

II.4.2 Pour le calcul, faire une nouvelle intégration par parties.

II.4.3 Pour intervertir les deux signes de sommation, étudier le reste d'ordre n d'une série géométrique, en utilisant le fait que la fonction $t \longmapsto \dfrac{t\,\ln t}{1-t^2}$ est bornée.

II.5.1 Intégrer par partie l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t+\sqrt{(1+t^2)})^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

II.5.2 Reconnaître que $f(t) = \text{Argsh } t$.

II.5.3 Utiliser le calcul de la question II.5.2 .

Partie III

III.1.3 Reprendre ici les résultats des deux questions précédentes.

III.1.4 Partir de la valeur de f' obtenue en III.1.2.

III.2.1 Se servir de la croissance de l'intégrale afin de prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$.

III.3.1 Utiliser l'inégalité $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.

III.3.2 Se servir de la question III.2

III.3.4 Montrer que $N_1(f_n)$ est de l'ordre de $\sqrt{n}$ en coupant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f_n(t)^2}{t^2}$ en deux intégrales d'extrémité $1/n$ grâce à la règle de Chasles.

Partie I

I.1 La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0, si bien qu'elle appartient à l'ensemble E_0. Ensuite, la fonction

$$h\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \left(\dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et vu que $\operatorname{Arctan} t \underset{t\to 0}{\sim} t$, elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$. De plus, $\operatorname{Arctan} t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi/2$, ce qui permet d'écrire

$$h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4t^2}$$

et la fonction $t \longmapsto 1/t^2$ est positive et intégrable au voisinage de l'infini, de sorte que h l'est aussi d'après le théorème de comparaison. Finalement,

$$\boxed{f \in \mathrm{E}_1}$$

I.2 Soit $x > 0$. H_x est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme fraction rationnelle en t dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\mathrm{H}_x(t) = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$$

et $t \longmapsto 1/t^4$ est intégrable et positive au voisinage de $+\infty$. Ainsi, H_x est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Or $f'(t) = 1/(1+t^2)$ donc $\mathrm{H}_1(t) = f'^2(t)$. On en déduit par définition de E_2 que

$$\boxed{f \in \mathrm{E}_2}$$

I.3.1 On a affaire à une intégrale à paramètre. Cherchons à utiliser le théorème de continuité dominée sous le signe somme. On a la majoration suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{1}{(t^2+x^2)\,(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{1}{t^2(1+t^2)}$$

mais la fonction définie par le membre de droite n'est pas intégrable au voisinage de 0. Cela suggère d'appliquer le théorème sur tous les intervalles du type $[\,\delta\,;+\infty\,[$, où δ est un réel strictement positif. Validons les hypothèses du théorème :

- la fonction $(x,t) \longmapsto \mathrm{H}_x(t)$ est continue sur $[\,\delta\,;+\infty\,[\,\times\,\mathbb{R}_+$ comme fraction rationnelle sans pôles dans le domaine d'étude ;
- de plus, $$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{1}{(t^2+x^2)\,(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{1}{\delta^2(1+t^2)}$$

  et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, d'après le théorème de continuité, la fonction φ est continue sur l'intervalle $[\,\delta\,;+\infty\,[$. Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

I.3.2 Supposons que x appartient à $\mathbb{R}_+^*$. On peut écrire la forme a priori

$$\frac{1}{(\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}+x^2)} = \frac{a}{1+\mathrm{T}} + \frac{b}{\mathrm{T}+x^2}$$

car cette fraction rationnelle en T n'a que des pôles simples. On calcule ces deux coefficients par substitution et l'on trouve

$$a = \frac{1}{x^2-1} \qquad \text{et} \qquad b = -a$$

$$\boxed{\frac{1}{(\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}+x^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{T}+x^2}\right)}$$

I.3.3 On déduit de la question I.3.2 en remplaçant T par t^2 que

$$\mathrm{H}_x(t) = \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)\frac{1}{x^2-1}$$

On peut intégrer les deux termes du membre de droite car les fonctions en présence sont positives sur $\mathbb{R}_+$ et majorées par $1/t^2$ sur un voisinage de $+\infty$. L'intégration donne alors

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{H}_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2-1}\left[\operatorname{Arctan} t - \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{t}{x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi(x-1)}{2x}\,\frac{1}{x^2-1}$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{H}_x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2x(x+1)}$$

d'où $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\} \qquad \boxed{\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2x(x+1)}}$

I.3.4 Grâce à la question I.3.3, on connaît φ sur $]\,0\,;1\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$. À la question I.3.1 on a vu que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc que

$$\mathrm{N}_2(f)^2 = \varphi(1) = \lim_{x\to 1}\frac{\pi}{2x(x+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Par conséquent, $\qquad \boxed{\mathrm{N}_2(f) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

I.4 On considère la fonction ψ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \qquad \psi(u) = u - \operatorname{Arctan} u$$

Cette fonction étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut étudier le signe de sa dérivée.

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \qquad \psi'(u) = 1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2} \geqslant 0$$