Mines Physique 2 PC 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Emmanuel Loyer (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Ce sujet est consacré à des matériaux dont l'indice de réfraction serait négatif. L'étude de ces matériaux est l'objet des deux premières parties, qui ne constituent que le tiers de l'épreuve, et qui sont finalement assez proches du cours. Les deux parties suivantes sont consacrées aux aspects énergétiques de l'électromagnétisme dans les milieux matériels.

- La première partie du sujet s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux matériels. Il s'agit là d'un retour aux sources de l'optique, car la lumière est une onde électromagnétique dont on peut étudier toutes les propriétés à partir des lois de l'électromagnétisme dans les milieux. On y regarde les différences de propagation dans des milieux où les permittivité et perméabilité relatives sont positives, puis négatives.
- La deuxième partie consiste en l'étude de la réflexion et de la réfraction d'une onde électromagnétique plane sur un dioptre plan séparant un milieu ordinaire (où les permittivité et perméabilité relatives sont positives) et un milieu où les permittivité et perméabilité relatives sont négatives. On y établit que le rayon réfracté émerge du même côté de la normale que le rayon incident ce qui, via la deuxième loi de Descartes de la réfraction, justifie la notion d'indice négatif. Cette partie s'achève sur des considérations énergétiques ; on y constate notamment que l'expression « naïve » de la densité d'énergie électromagnétique n'est pas valable dans un milieu où la permittivité et la perméabilité sont négatives.
- L'objet de la troisième partie est d'établir une expression pour la densité d'énergie dans un diélectrique non absorbant. Cette étude détaillée conduit à une expression positive de la densité d'énergie, ainsi qu'à diverses considérations sur les notions de propagation, de vitesse de phase et de vitesse de groupe.
- L'objet de la quatrième partie est d'établir dans un cadre plus général l'expression de la densité d'énergie dans un milieu dispersif. Pour atteindre cet objectif, l'énoncé fournit un certain nombre de relations qu'on ne peut pas établir avec les connaissances du programme d'électromagnétisme. Cette partie se termine sur une question consacrée aux milieux d'indice négatif, en proposant un élément de réfutation de l'existence de ces milieux.

Ce sujet est très ambitieux, très intéressant, même si l'on peut regretter qu'il faille admettre certains résultats fournis par l'énoncé : c'est le prix à payer pour établir des résultats dont la démonstration complète dépasse largement le cadre du programme. On peut aussi regretter la présence de quelques erreurs d'énoncé qui ne facilitent pas la résolution d'un sujet déjà difficile ; il en est de même pour les fluctuations de notations, ainsi que la donnée d'explications ou de relations qui ne sont ni justifiées, ni utiles à la compréhension et à la résolution du problème.

Indications

1 En utilisant les champs réels, le vecteur de Poynting s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{S}} = \overrightarrow{\mathrm{E}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{H}}$$

2 Pour établir les équations de propagation des champs électrique et magnétique, il faut faire usage de l'identité $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div} - \Delta$.

3 La notion de « direction de propagation de l'onde » n'est pas forcément très claire : on pourra distinguer la direction de propagation de la phase et la direction du flux d'énergie.

7 Quand l'énoncé annonce que « la direction de propagation de l'onde transmise est dans le sens des z croissants », il faut comprendre que la composante suivant l'axe $(\mathrm{O}z)$ du vecteur de Poynting de l'onde transmise est positive.

10 L'énergie potentielle d'un ressort de raideur A et d'allongement $\overrightarrow{r}$ vaut $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{A}\,r^2$.

12 On montrera l'expression suivante pour g :

$$g(\omega,\omega_0,\omega_\mathrm{p}) = \frac{{\omega_\mathrm{p}}^2\,\omega^2}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2} = \frac{\chi_\mathrm{s}}{(1-x^2)^2}$$

15 On montrera que la densité d'énergie u_m est stationnaire et uniforme.

17 Il y a une erreur de signe dans l'énoncé : l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}} = \frac{\omega}{c^2}\left(-\frac{\mathrm{N}\,q\,\overrightarrow{\underline{r}}}{\varepsilon_0} - \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}\right)$$

19 On rappelle que $v_\mathrm{g} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$. Son expression s'obtient simplement en différentiant la relation $k^2 = \varepsilon_\mathrm{r}\,\omega^2/c^2$.

21 On rappelle la formule du double produit vectoriel :

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\,\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\,\overrightarrow{c}$$

25 L'expression recherchée pour ε_r est celle donnée par le modèle de l'électron élastiquement lié.

26 Il y a une erreur dans l'énoncé : il faut lire

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{D}}_0}^* = \varepsilon^*(\omega)\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_0}^* \qquad \text{au lieu de} \qquad \overrightarrow{\underline{\mathrm{D}}_0}^* = \varepsilon(\omega)\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_0}^*$$

27 Dans le cas d'un signal quasi-monochromatique, on utilisera le fait que

$$\langle \underline{\mathrm{X}}(t)\rangle_{\mathrm{T}_0} = \langle \underline{\mathrm{X}}_0(t)\,\exp(-\mathrm{j}\,\omega_0\,t)\rangle_{\mathrm{T}_0} \simeq 0$$

29 Dans le cas considéré, les densités d'énergie électrique et magnétique ne sont plus égales.

1. Ondes planes dans un matériau homogène

1 Les champs électrique et magnétique (complexes) s'écrivent

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_0}\,\exp \mathrm{j}(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_0}\,\exp \mathrm{j}(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})$$

Avec cette convention de signe, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathrm{j}\,\omega \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\nabla} = -\mathrm{j}\,\overrightarrow{k}$$

L'équation de Maxwell-Faraday $\qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\;\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}}}{\partial t}$

devient $\qquad -\mathrm{j}\,\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_0} = -\mathrm{j}\,\omega\,\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_0}$

On en déduit l'expression de $\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_0}$:

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}_0} = \frac{k}{\omega}\,\overrightarrow{u_z}\wedge(\mathrm{E}_0\,\overrightarrow{u_y}) = -\frac{k}{\omega}\,\mathrm{E}_0\,\overrightarrow{u_x}$$

et par conséquent celle de $\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{\mathrm{B}}} = -\frac{k}{\omega}\,\mathrm{E}_0\,\overrightarrow{u_x}\,\exp \mathrm{j}(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$$

Comme E_0 et k sont réels, B_0 l'est aussi, et les champs électrique et magnétique réels s'écrivent

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0\,\overrightarrow{u_y}\cos(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{B}} = -\frac{k}{\omega}\,\mathrm{E}_0\,\overrightarrow{u_x}\cos(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})$$

ce qui donne pour le vecteur de Poynting

$$\overrightarrow{\mathrm{S}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{E}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{B}}}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}} = -\frac{k\,{\mathrm{E}_0}^2}{\mu_0\,\mu_\mathrm{r}\,\omega}\,(\overrightarrow{u_y}\wedge\overrightarrow{u_x})\cos^2(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})$$

De plus, $\langle\cos^2(\omega\, t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\rangle_\mathrm{t} = 1/2$, et $\overrightarrow{u_y}\wedge\overrightarrow{u_x} = -\overrightarrow{u_z}$, ce qui implique pour la valeur moyenne du vecteur de Poynting

$$\boxed{\langle\overrightarrow{\mathrm{S}}\rangle_\mathrm{t} = \frac{k\,{\mathrm{E}_0}^2}{2\,\mu_0\,\mu_\mathrm{r}\,\omega}\,\overrightarrow{u_z} = \frac{{\mathrm{E}_0}^2}{2\,\mu_0\,\mu_\mathrm{r}}\,\frac{\overrightarrow{k}}{\omega}}$$

> Notons que l'on obtient la même expression pour la valeur moyenne du vecteur de Poynting si l'on travaille (correctement !) avec les champs complexes. En effet, on obtient directement la valeur moyenne du vecteur de Poynting à partir des champs complexes :
>
> $$\langle\overrightarrow{\mathrm{S}}\rangle_\mathrm{t} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\overrightarrow{\mathrm{E}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{H}}^*)$$
>
> où le facteur 1/2 a pour origine la valeur moyenne de $\cos^2\omega\, t$.

Ainsi, le champ magnétique est dirigé suivant $-\overrightarrow{u_x}$. Quant au vecteur de Poynting, qui s'interprète comme le vecteur densité surfacique de puissance électromagnétique et il est dirigé selon $\overrightarrow{u_z}$: il a donc la direction et le sens de $\overrightarrow{k}$. L'énergie se propage donc dans la même direction et dans le même sens que la phase de l'onde.

2 Pour établir l'équation de d'Alembert, on prend d'abord le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{E}} = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{B}}}{\partial t} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{E}} = -\frac{\partial\, \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{B}}}{\partial t}$$

et on utilise l'identité $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div} - \Delta$ pour obtenir

$$-\Delta \overrightarrow{\text{E}} + \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\ \overrightarrow{\text{E}}) = -\frac{\partial\, \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{B}}}{\partial t}$$

Il faut ensuite faire usage des équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère, qui en l'absence de charge et de courant libres se réduisent à

$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{D}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{H}} = \frac{\partial \overrightarrow{\text{D}}}{\partial t}$$

Comme le matériau est linéaire et homogène,

$$\overrightarrow{\text{D}} = \varepsilon_0\, \varepsilon_{\text{r}}\ \overrightarrow{\text{E}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{B}} = \mu_0\, \mu_{\text{r}}\ \overrightarrow{\text{H}}$$

les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday deviennent

$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{E}} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{B}} = \varepsilon_{\text{r}}\, \mu_{\text{r}}\, \varepsilon_0\, \mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{\text{E}}}{\partial t}$$

où $\varepsilon_0\, \mu_0\, c^2 = 1$. On obtient $\boxed{\Delta \overrightarrow{\text{E}} = \dfrac{\varepsilon_{\text{r}}\, \mu_{\text{r}}}{c^2} \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{\text{E}}}{\partial t^2}}$

qui constitue l'équation de propagation du champ électrique.

Montrons maintenant que le champ magnétique satisfait la même équation de propagation. Pour cela, commençons par prendre le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{H}} = \frac{\partial\, \overrightarrow{\text{rot}}\ \text{D}}{\partial t} \qquad \text{soit} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\ \overrightarrow{\text{H}}) - \Delta \overrightarrow{\text{H}} = \frac{\partial\, \overrightarrow{\text{rot}}\ \text{D}}{\partial t}$$

En fonction de $\overrightarrow{\text{E}}$ et $\overrightarrow{\text{B}}$, cette équation s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\ \overrightarrow{\text{B}}) - \Delta \overrightarrow{\text{B}} = \varepsilon_{\text{r}}\, \mu_{\text{r}}\, \varepsilon_0\, \mu_0 \frac{\partial\, \overrightarrow{\text{rot}}\ \text{E}}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell du flux magnétique, $\text{div}\ \overrightarrow{\text{B}} = 0$, et l'équation de Maxwell-Faraday conduisent à l'équation de propagation du champ magnétique

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{\text{B}} = \frac{\varepsilon_{\text{r}}\, \mu_{\text{r}}}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{\text{B}}}{\partial t^2}}$$

Or, l'équation de d'Alembert $\quad \Delta \overrightarrow{\text{X}} - \dfrac{1}{v^2} \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{\text{X}}}{\partial t^2} = 0$

décrit un champ $\overrightarrow{\text{X}}$ se propageant à la vitesse de phase v. Par identification, la vitesse de phase des ondes électromagnétiques dans un milieu caractérisé par ε_{r} et μ_r est donc

$$\boxed{v = \frac{c}{n} \qquad \text{avec} \qquad n = \sqrt{\varepsilon_{\text{r}}\, \mu_{\text{r}}}}$$

> Notons qu'une onde proportionnelle à $\exp \text{j}(\omega\, t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r})$ satisfait l'équation de d'Alembert obtenue précédemment si et seulement si
>
> $$k^2 = n^2\, \frac{\omega^2}{c^2}$$