Mines Physique 1 PC 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Tailleur (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Fourmond (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte trois parties que l'on peut traiter de manière tout à fait indépendante. Il fait intervenir des notions de magnétostatique – principalement sur les moments magnétiques – et de mécanique (mécanique du solide et frottement solide).

La première partie est très proche du cours. Elle passe en revue les connaissances sur les moments magnétiques que tout candidat doit avoir en se présentant aux concours. Exception faite de la question 3, qui est un peu calculatoire, cette partie ne présente pas de difficulté majeure.

La deuxième partie, divisée en deux sous-parties, étudie le mouvement d'un disque possédant un moment magnétique dans un champ magnétique extérieur constant. On néglige dans un premier temps les frottements, et il s'agit d'appliquer les théorèmes de base de la mécanique, ainsi que de se familiariser avec les notations du sujet. Cette partie devrait permettre de bien se représenter les choses, pour pouvoir aborder la partie avec frottements en comprenant ce qui se passe physiquement. Dans un deuxième temps, le disque roule à l'intérieur d'un cercle plus grand, et le problème devient plus calculatoire. La présence de frottements permet de vérifier que le candidat connaît les lois de Coulomb du frottement solide.

Dans la troisième partie, on étudie l'interaction entre deux aiguilles aimantées, que l'on modélise par une aiguille dans un champ tournant. Si cette partie continue de faire appel à des connaissances de mécanique classique, elle nécessite également de comprendre un diagramme de phase, de savoir linéariser un système d'équations différentielles et utiliser la théorie des perturbations. Elle est donc un peu plus « riche » que les précédentes.

Ce sujet est assez long, les notations choisies par l'énoncé ne sont pas forcément très claires et plusieurs erreurs semblent s'être glissées dans le sujet, ce qui le rend parfois difficile à comprendre.

> Les infortunés candidats de 2004 ont dû passer deux fois la première épreuve de physique des Mines (en filière PC) : suite à un vol (ou une perte) de 150 copies, le secrétariat du Concours Commun Mines-Ponts a pris ses responsabilités et organisé un nouvel écrit. Pour la petite histoire, il était initialement prévu que tous les candidats repassent l'épreuve à Paris – seule une mobilisation instantanée et organisée des enseignants a permis d'assurer que la deuxième session se déroule dans chaque académie.
>
> Les copies issues du premier écrit n'ayant pas été corrigées, c'est l'énoncé de la deuxième session que nous vous présentons.
>
> Le lecteur curieux de connaître le premier énoncé pourra néanmoins se reporter au tome *PSI Physique et Chimie 2004*, car la première moitié de ce sujet était identique dans les filières PC et PSI – comme c'est souvent le cas au concours Mines-Ponts. L'énoncé complet est en outre disponible sur le site `www.H-K.fr`.

Indications

I. Sur la notion de moment magnétique

1 Lorsque l'on passe d'une distribution linéique de courant à une distribution volumique, on remplace $i\,\overrightarrow{\mathrm{d}\rho}$ par $\overrightarrow{\jmath}\,\mathrm{d}\tau$.

3 Question un peu calculatoire. En suivant l'énoncé, calculer $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ dans le cas d'une spire circulaire de rayon a (où l'intégrale est alors directement calculable) et de courant $i = \mathrm{M}/(\pi\, a^2)$. Notons une première erreur dans l'énoncé :

$$\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\varphi} \sin\theta$$

4 Penser à modéliser le moment magnétique par une spire pour retrouver le flux qui la traverse.

II. Mouvement sur support circulaire d'un disque magnétisé

7 Attention, φ est orienté en sens indirect. Deuxième erreur de l'énoncé : le point O n'est pas défini, il faut le prendre au centre du grand cercle.

8 Pour montrer que le potentiel est périodique, on peut faire l'analogie avec un point matériel dans un potentiel sinusoïdal. Pour calculer la période, utiliser $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ pour obtenir une expression de $\mathrm{d}t$.

11 Attention, le disque se déplace donc la condition de roulement sans glissement n'est pas $\mathrm{R}\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$!

12 Utiliser la condition de roulement sans glissement pour passer de φ à θ.

13 « B tend vers l'infini » est une limite mathématique, il faut penser à son sens physique : le terme qui ne dépend pas de B, *ie* le poids, est négligeable.

17 Il y a une erreur dans l'énoncé : on a bien sûr besoin de la masse m pour les expressions des réactions.

18 Encore une erreur : il faut prendre $f = 0,8$ et non $f = 0,6$. De plus, lorsque $\alpha_t > \alpha_n$, il n'y a plus roulement sans glissement.

III. La boussole de Croquette

19 Si θ est sinusoïdal, de pulsation ω, alors $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$. L'énoncé donne une indication sur le module du champ crée par M_2 au point O_1, et le système [1] donne le couple que ce champ exerce sur le moment M_1. On peut relier ces deux indications en calculant le module du couple (qui fait intervenir le module du champ).

22 Quand on cherche l'extension d'un mouvement, on raisonne le plus souvent énergétiquement : on cherche à maximiser l'extension à énergie fixée.

23 La méthode « simple » attendue consiste à se placer dans le référentiel tournant. Cependant, le retour au référentiel initial ne donne pas le portrait de phase de $(\dot{\theta}, \theta)$ mais de $(\dot{\theta}, \theta - \Omega\, t)$ et le résultat repris à la question 24 par l'énoncé semble douteux.

25 Développer les sinus en séparant les termes en fonction de leur puissance en ε.

I. Sur la notion de moment magnétique

1 Comme on peut le lire dans la définition de l'énoncé, un moment magnétique est le produit d'un courant par une surface. Son unité est donc

$$\boxed{\mathrm{A\,.\,m^2}}$$

Pour tenir compte d'une distribution volumique de courant, on remplace $i\,\mathrm{d}\overrightarrow{\rho}$ par $\overrightarrow{\jmath}\,\mathrm{d}\tau$. Le moment magnétique s'écrit alors

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\int_\tau \overrightarrow{\rho} \wedge \overrightarrow{\jmath}\,\mathrm{d}\tau}$$

2 Considérons un moment magnétique M placé en O. Le champ qu'il crée ne dépend que de son module et de son orientation, mais pas de son origine physique. C'est pourquoi on peut considérer que M est le moment magnétique associé à une spire contenue dans le plan $(x\mathrm{O}y)$, de centre O, parcourue par un courant i et de surface S de telle manière que $\mathrm{M} = i\,\mathrm{S}$. On voit alors que tout plan contenant l'axe $(\mathrm{O}z)$ est un plan d'antisymétrie du courant i ; c'est entre autres le cas du plan $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi})$ qui contient donc $\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{Q})$.

> On rappelle que :
>
> - Le champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est contenu dans tout plan de symétrie et orthogonal à tout plan d'antisymétrie de la distribution de charges qui le génère.
> - Le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ est contenu dans tout plan d'antisymétrie et orthogonal à tout plan de symétrie de la distribution de courants qui le génère.

3 La relation $\overrightarrow{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{A}}$ reste valable pour $\overrightarrow{\mathrm{A}'} = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$, quelle que soit la fonction φ. Pour fixer l'unicité du choix de potentiel vecteur, on doit donc imposer une condition supplémentaire appelée choix de jauge. Cela peut se faire via la jauge de

- Coulomb : $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{A}} = 0$
- Lorenz : $\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{A}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = 0}$

> Attention, il ne faut pas confondre, comme le fait l'énoncé, le physicien hollandais H. A. Lorentz, qui vécut de 1853 à 1928 et le physicien danois L. Lorenz, qui vécut de 1829 à 1891 et dont la Jauge de Lorenz (sans « t » !) porte le nom.

Développons $1/\mathrm{PQ}$. Calculons tout d'abord

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}^2 &= (\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})^2 = (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\rho})^2 \\ &= r^2\left(1 - \frac{2}{r}\,\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{\rho} + \mathrm{o}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right)\end{aligned}$$

d'où
$$\mathrm{PQ} = r\left(1 - \frac{1}{r}\,\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{\rho} + \mathrm{o}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right)$$

enfin
$$\frac{1}{\mathrm{PQ}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{r}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{\rho} + \mathrm{o}\left(\frac{\rho}{r}\right)\right)$$

Déterminons $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ grâce à la formule de l'énoncé. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,i\oint_{(\mathrm{C})}\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{P}}}{\mathrm{PQ}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,i\oint_{(\mathrm{C})}\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\rho}}{r}\left(1 + \frac{1}{r}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{\rho}\right)\end{aligned}$$

Or,
$$\oint_{(\mathrm{C})}\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\rho}}{r} = 0$$

donc
$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi\,r^2}\,i\oint_{(\mathrm{C})}\mathrm{d}\,\overrightarrow{\rho}\,(\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{\rho})$$

Assimilons le moment $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ à celui créé par une spire de rayon a parcourue par un courant i. Dans le cas d'une spire, $\mathrm{M} = i\,\mathrm{S}$ et on doit donc avoir

$$i = \frac{\mathrm{M}}{\pi\,a^2}$$

Le problème étant invariant par rotation, on peut considérer que le point Q est dans le plan $(x\mathrm{O}z)$. Posons $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{\rho}) = \alpha$. On a alors

$$\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{\rho} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{\rho} = a\,\sin\theta\,\cos\alpha$$

De plus,
$$\overrightarrow{\mathrm{d}\rho} = a\,(-\sin\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \cos\alpha\,\overrightarrow{e_y})\,\mathrm{d}\alpha$$

On peut donc écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0\,\mathrm{M}}{4\,\pi\,r^2\,\pi\,a^2}\int_{\alpha=0}^{2\pi} a\,\mathrm{d}\alpha\,(-\sin\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \cos\alpha\,\overrightarrow{e_y})\,a\,\sin\theta\,\cos\alpha$$

Lorsqu'on développe le produit dans l'intégrande, le terme en $\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha/2$ ne contribue pas, car son intégrale entre 0 et 2π est nulle. En outre, le terme en $\cos^2\alpha = (\cos 2\alpha + 1)/2$ donne un terme en $\cos 2\alpha$ qui sera nul une fois intégré et il ne reste donc que le terme $1/2$, qui donne $\pi\,\sin\theta\,a^2\,\overrightarrow{e_y}$ une fois intégré. Ainsi,

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0\,\mathrm{M}}{4\,\pi^2\,r^2}\,\sin\theta\,\pi\,\overrightarrow{e_y}$$

Or, $\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\varphi}\sin\theta$. De plus, puisque l'on a supposé que Q est dans le plan $(x\mathrm{O}z)$, $\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_y}$. Par conséquent,

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0}{4\,\pi\,r^2}\,\mathrm{M}\,\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_r}$$

Finalement,
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{M}}\wedge\overrightarrow{e_r}}{r^2}}$$