Centrale Physique 1 PC 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Daniel Jost (ENS Lyon) ; il a été relu par Vincent Fourmond (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet aborde différents aspects du phénomène des marées océaniques. Il est composé de quatre parties d'égales longueurs.

- La partie I propose un calcul de la force de marée et l'étude d'un modèle statique de la marée océanique. Elle fait appel à des notions de mécanique classique et non galiléenne, tout en restant assez proche du cours.
- La partie II étudie la propagation d'ondes de gravité à la surface d'une étendue liquide avec le calcul d'une équation de propagation. Elle utilise des notions issues de la mécanique des fluides et des ondes. Les parallèles avec le cours sur l'électromagnétisme et l'acoustique sont fréquents.
- La partie III s'attache à l'étude de l'équation de propagation des ondes de gravité pour différents exemples. Là aussi, des connaissances sur les ondes sont indispensables.
- Enfin, la partie IV étudie l'influence de la rotation terrestre sur les marées océaniques. On utilise à nouveau la propagation des ondes de gravité, en tenant compte cette fois de la force de Coriolis.

Ce sujet est de difficulté moyenne. Proche du cours, il nécessite de bonnes connaissances sur les potentiels et sur les ondes en général.

Indications

Partie I

I.A.2 Dans l'écriture de l'accélération d'entraînement, ne pas oublier le mouvement de T dans (R_0).

I.B.3 Revenir à la définition infinitésimale d'un potentiel : $\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P})\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} = -\mathrm{dV}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P})$.

I.B.4 Exprimer $\cos\widehat{\mathrm{Z}}_{\mathrm{A}}$ en fonction des coordonnées de P.

I.C.1 Se servir du bilan de la question I.A.2, avec $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\,\mathrm{dV}$.

Partie II

II.A.1 Calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v}$ avec $v_z = 0$ et conclure.

II.A.2 Utiliser la formule donnant la quantité de matière qui traverse une surface $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$ pendant $\mathrm{d}t$: $\mu\,\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}\,\mathrm{d}t$. L'appliquer aux quatre faces de la colonne. Conclure en revenant à la définition de div : $\partial/\partial x + \partial/\partial y$.

II.A.4 Projeter l'équation (**3**) sur l'axe des z pour obtenir P.

II.B.4 Garder l'équation (**5**) sous forme vectorielle et utiliser des formules d'analyse vectorielle pour aboutir à l'équation de propagation.

Partie III

III.A.3 Se servir de l'équation (**5**) et du fait que $v_x(x = \mathrm{L}, t) = 0$.

III.B.1 La mer est fermée en $x = 0$ et en $x = \mathrm{L}$, donc $g'(0) = g'(\mathrm{L}) = 0$.

Partie IV

IV.A.2 Négliger la composante verticale de la force de Coriolis afin de retrouver la même expression pour la pression.

IV.A.3 Réécrire les nouvelles équations en notation complexe.

IV.B.1 Se servir des équations données à la question IV.A.3 et de $v_y(x, \pm\, b, t) = 0$.

IV.B.2.a Mettre $\underline{\xi}$ sous la forme $\underline{f}\,\exp(i\omega t)$ et vérifier que $\underline{f}$ vérifie l'équation de la question IV.A.4 et les conditions aux limites.

IV.B.3.b Traduire le fait que $\xi = 0$ et aboutir à des conditions sur x et y.

IV.B.3.c Se servir des conclusions de la question précédente.

I. Théorie statique des marées

A. Définition de la force de marée

I.A.1 On considère le système formé uniquement de la Terre dans le référentiel (R_0) galiléen. La Terre, n'est soumise dans (R_0), qu'à la force d'attraction gravitationnelle due à l'astre (A),

$$-k\mathrm{M_T M_A}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AT}}}{\mathrm{AT}^3}$$

Appliquons à présent dans (R_0) le principe fondamental de la dynamique à la Terre :

$$\mathrm{M_T}\,\overrightarrow{a}_\mathrm{T} = -k\mathrm{M_T M_A}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AT}}}{\mathrm{AT}^3}$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{a}_\mathrm{T} = -k\mathrm{M_A}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AT}}}{\mathrm{AT}^3}}$$

I.A.2 Effectuons un bilan des forces appliquées à P dans (R_{sol}) :

- force de contact $\overrightarrow{f}$;
- force de gravitation due à la Terre $\overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{T} = -km\mathrm{M_T}\,\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{TP}}}{\mathrm{TP}^3}$;
- force de gravitation due à (A) $\overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{A} = -km\mathrm{M_A}\,\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{\mathrm{AP}^3}$;
- force d'inertie d'entraînement (car le repère est non galiléen) $\overrightarrow{\mathrm{F}}_\mathrm{ie} = -m\,\overrightarrow{a}_\mathrm{e}$.

L'accélération d'entraînement est celle du point coïncident avec P dans le référentiel galiléen (R_0). Or, le mouvement du point P dans (R_0) peut être décomposé en deux mouvements indépendants : le mouvement de la Terre par rapport à (R_0) et le mouvement de P par rapport à la Terre (c'est-à-dire à (R_{sol})). Ainsi,

$$\overrightarrow{a}_\mathrm{e} = \overrightarrow{a}_\mathrm{T} + \overrightarrow{a}_{/(\mathrm{R_{sol}})}(\mathrm{P})$$

De plus, dans (R_{sol}) le point P tourne autour d'un axe fixe, à distance fixe. Donc si on nomme H le projeté orthogonal de P sur l'axe de rotation de la Terre, on a :

$$\overrightarrow{a}_\mathrm{e} = \overrightarrow{a}_\mathrm{T} - \Omega^2\,\overrightarrow{\mathrm{HP}} = -k\mathrm{M_A}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AT}}}{\mathrm{AT}^3} - \Omega^2\,\overrightarrow{\mathrm{HP}}$$

> Ici, la force de Coriolis est nulle car le point P est immobile dans (R_{sol}).

La particule P étant au repos dans (R_{sol}), son accélération est nulle dans ce référentiel. Ainsi, en appliquant le principe fondamental de la dynamique à P dans (R_{sol}) non galiléen, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{f} - km\mathrm{M_T}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{TP}}}{\mathrm{TP}^3} - km\mathrm{M_A}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{\mathrm{AP}^3} + km\mathrm{M_A}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{AT}}}{\mathrm{AT}^3} + m\Omega^2\,\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \overrightarrow{0}}$$

I.A.3 Hormis les forces de contact, on dénombre quatre termes dans l'expression précédente. Deux d'entre eux sont proportionnels à m et ne dépendent pas de A. Ils sont donc propres à M. On définit alors le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ par

$$\boxed{\overrightarrow{g} = \overrightarrow{\mathrm{X}}(\mathrm{P}) = \Omega^2\,\overrightarrow{\mathrm{HP}} - k\mathrm{M_T}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{TP}}}{\mathrm{TP}^3}}$$

Il reste
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P}) = k\mathrm{M_A}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AT}}}{\mathrm{AT}^3} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{\mathrm{AP}^3}\right) = \overrightarrow{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}) - \overrightarrow{\mathrm{G}}_{\mathrm{A}}(\mathrm{T})}$$

$\overrightarrow{g}$ inclut l'accélération d'entraînement qui ne dépend que du point considéré.

B. Calcul de la force de marée

I.B.1 Effectuons tout d'abord une approximation de $\|\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P})\|$: comme

$$\sqrt{4\,x^2 + y^2 + z^2} \approx \mathrm{R_T} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{AT} \approx \mathrm{AP}$$

il vient
$$\|\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P})\| \approx \frac{k\,\mathrm{M_A}\,\mathrm{R_T}}{\mathrm{TA}^3}$$

soit
$$\boxed{\frac{\|\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P})\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}}(\mathrm{P})\|} \approx \frac{\mathrm{M_A}}{\mathrm{M_T}}\left(\frac{\mathrm{R_T}}{\mathrm{TA}}\right)^3 \approx 6.10^{-8}}$$

Les forces de marées demeurent donc excessivement faibles comparées à la force d'attraction terrestre.

I.B.2 Remplaçons les différentes valeurs de x, y et z pour chaque point P_i dans l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P})$ simplifiée, donnée dans le préambule de la partie I.B :

- pour $\mathrm{P_1}$: $\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P_1}) = 2\,\dfrac{k\,\mathrm{M_A}\,\mathrm{R_T}}{\mathrm{TA}^3}\,\overrightarrow{e_x}$;
- pour $\mathrm{P_2}$: $\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P_2}) = -\,\dfrac{k\,\mathrm{M_A}\,\mathrm{R_T}}{\mathrm{TA}^3}\,\overrightarrow{e_y}$;
- pour $\mathrm{P_3}$: $\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P_3}) = -\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P_1})$;
- pour $\mathrm{P_4}$: $\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P_4}) = -\overrightarrow{\mathrm{C}}_{\mathrm{AT}}(\mathrm{P_2})$.

On observe que les forces de marées sont maximales lorsque P est aligné avec T et A et, aussi étonnant que cela paraisse, elles sont de même intensité en $\mathrm{P_1}$ et en $\mathrm{P_3}$.