Centrale Maths 2 PC 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hicham Qasmi (ENS Lyon) ; il a été relu par Aurélien Alvarez (ENS Lyon) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite des coniques de $\mathbb{R}^2$ et de leurs applications pour prouver certains théorèmes en géométrie. Il porte essentiellement sur l'étude des points communs à certains ensembles de coniques. Il est constitué d'un préliminaire et de trois parties indépendantes.

- La première partie permet d'établir quelques résultats simples qui sont utiles dans la deuxième partie. Elle fait appel à des notions de base, en algèbre linéaire et sur les coniques.
- La deuxième porte sur l'étude de certaines coniques ainsi que de leurs points fixes. Elle est longue, assez calculatoire et technique.
- La troisième étudie également les points communs à certaines coniques, mais par une autre méthode, plus algébrique, en utilisant les nombres complexes, les déterminants de matrices et la dualité.
- Enfin, la quatrième partie démontre un théorème de géométrie en introduisant un ensemble judicieux de coniques dont on réalise l'étude algébrique.

Dans l'ensemble, le sujet est très long et assez difficile. Il présente le fort intérêt d'être un sujet de géométrie très complet car il fait appel à des notions variées : l'étude des courbes paramétrées et la réduction des coniques pour ce qui est des outils de géométrie ; les déterminants, la dualité et les polynômes pour les outils algébriques.

INDICATIONS

Partie I

I.2 Introduire une représentation paramétrique du cercle.

Partie II

II.A.3 Raisonner sur une équation cartésienne d'une conique de $\mathcal{E}_3$ pour relier $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ à $\bigcap\limits_{\mathscr{C} \in \mathcal{E}_1} \mathscr{C}$.

II.B.1 Utiliser les coordonnées cartésiennes pour montrer que φ est bien définie.

II.C.1.b Que dire d'une conique dont l'équation ne présente pas de partie linéaire ?

Partie III

III.A.2.a Montrer et utiliser le fait que $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \neq 0$.

III.A.2.b On peut considérer S comme l'intersection de trois hyperplans.

III.A.2.c Associer à M_4 un hyperplan judicieusement choisi.

III.B.2 Garder à l'esprit que le déterminant est une forme multilinéaire alternée.

III.B.4.a Utiliser les questions III.A.2.c et III.B.3.

III.B.4.b Trouver des vecteurs directeurs simples des bissectrices du couple de droites $((\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2), (\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4))$.

III.C.1 Penser à changer de repère.

III.C.2 On pourra montrer que la droite (BC) et la parallèlle passant par A qui lui est associée constituent une conique appartenant à $\mathcal{E}_2$.

Partie IV

IV.B S'inspirer de la question III.A.2.c et introduire des hyperplans adaptés.

IV.C.2 On peut écrire que $a^3 = a\bar{z}_i z_i$.

IV.C.4.a Combiner les fonctions H_1 et H_2.

IV.C.4.b M_4 peut-il être confondu avec M_1 ou M_2 ou M_3 ?

IV.D Introduire un nouveau repère bien choisi.

Partie I

I.1 L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel. Soit (a,b,c,d,e) un quintuplet de réels vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad a + b\cos\theta + c\cos 2\theta + d\sin\theta + e\sin 2\theta = 0.$$

En évaluant pour certaines valeurs de θ cette identité fonctionnelle, on obtient un système linéaire d'équations satisfait par (a,b,c,d,e) :

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \text{pour} \quad \theta = 0 \\ a-b+c=0 & \text{pour} \quad \theta = \pi \\ a-c+d=0 & \text{pour} \quad \theta = \pi/2 \\ a-c-d=0 & \text{pour} \quad \theta = 3\pi/2 \end{cases}$$

En retranchant la deuxième équation à la première et la quatrième à la troisième, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b-c=0 \\ 2b=0 \\ 2d=0 \end{cases}$$

Puis si l'on somme les deux premières équations, il vient

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 2a=0 \\ 2b=0 \\ 2d=0 \end{cases}$$

Finalement, $$a=b=c=d=e=0$$

$$\boxed{\text{La famille de fonctions considérées est donc libre.}}$$

I.2 Soit $\mathcal{D}$ le cercle de P de centre $\Omega_{(\alpha;\beta)}$, de rayon ρ strictement positif. Montrons que si $\mathcal{D}$ est inclus dans $\mathscr{C}_{(\mathrm{A,B,C,D,E})}$, alors $\mathrm{A}=\mathrm{C}$ et $\mathrm{B}=0$.

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \mathrm{X}(\theta) = \rho\cos\theta + \alpha \\ \mathrm{Y}(\theta) = \rho\sin\theta + \beta \end{cases}$$

Par hypothèse $\mathcal{D}$ est inclus dans $\mathscr{C}_{(\mathrm{A,B,C,D,E})}$ donc pour tout réel θ

$$\mathrm{A}\rho^2\cos^2\theta + \mathrm{B}\rho^2\sin\theta\cos\theta + \mathrm{C}\rho^2\sin^2\theta + \mathrm{D}'\rho\cos\theta + \mathrm{E}'\rho\sin\theta + \mathrm{F}' = 0$$

avec $$\begin{cases} \mathrm{D}' = 2\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{D} \\ \mathrm{E}' = 2\mathrm{C}\beta + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{E} \\ \mathrm{F}' = \mathrm{A}\alpha^2 + \mathrm{B}\alpha\beta + \mathrm{C}\beta^2 + \mathrm{D}\alpha + \mathrm{E}\beta + \mathrm{F} \end{cases}$$

Or, $$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta \\ 2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta \end{cases}$$

de sorte que, pour tout réel θ,

$$\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2}\right)\rho^2\cos 2\theta + \frac{\mathrm{B}}{2}\rho^2\sin 2\theta + \mathrm{D}'\rho\cos\theta + \mathrm{E}'\rho\sin\theta + \mathrm{F}' + \left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}\right)\rho^2 = 0$$

D'après la question précédente, les fonctions $\theta \longmapsto \cos 2\theta$, $\theta \longmapsto \sin 2\theta$, $\theta \longmapsto \cos\theta$, $\theta \longmapsto \sin\theta$ et $\theta \longmapsto 1$ sont linéairement indépendantes, donc

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}-\mathrm{C} &= 0 \\ \mathrm{B} &= 0 \\ \mathrm{D}' &= 0 \\ \mathrm{E}' &= 0 \\ \mathrm{F}' + \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}}{2}\rho^2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

où l'on a utilisé le fait que ρ est non nul. On a bien

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = 0}$$

Réciproquement, soit A non nul et une conique de la forme $\mathscr{C}_{(\mathrm{A},0,\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F})}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathscr{C}_{(\mathrm{A},0,\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F})} &\iff \mathrm{AX}^2 + \mathrm{AY}^2 + \mathrm{DX} + \mathrm{EY} + \mathrm{F} = 0 \\ &\iff \mathrm{A}\left(\mathrm{X} + \frac{\mathrm{D}}{2\mathrm{A}}\right)^2 + \mathrm{A}\left(\mathrm{Y} + \frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{A}}\right)^2 + \mathrm{F} - \frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2}{4\mathrm{A}} = 0 \\ &\iff \mathrm{A}^2\left(\mathrm{X} + \frac{\mathrm{D}}{2\mathrm{A}}\right)^2 + \mathrm{A}^2\left(\mathrm{Y} + \frac{\mathrm{E}}{2\mathrm{A}}\right)^2 + \mathrm{AF} - \frac{\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2}{4} = 0 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que A est non nul.

- Si $4\mathrm{AF} > \mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2$, alors $\mathscr{C}_{(\mathrm{A},0,\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F})} = \varnothing$.
- Si $4\mathrm{AF} \leqslant \mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2$, alors $\mathscr{C}_{(\mathrm{A},0,\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F})}$ est le cercle de centre $(-\mathrm{D}/2\mathrm{A}; -\mathrm{E}/2\mathrm{A})$ de rayon $\rho = \sqrt{\dfrac{\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2-4\mathrm{AF}}{4\mathrm{A}^2}}$.

$$\boxed{\text{Une conique de la forme } \mathscr{C}_{(\mathrm{A},0,\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{E},\mathrm{F})} \text{ est soit un cercle soit l'ensemble vide.}}$$