CCP Maths 1 PC 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Paul Pichaureau (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Emmanuel Delsinne (ENS Cachan) et Sébastien Gadat (Enseignant-chercheur à l'Université).

Ce problème porte sur les espaces euclidiens ; il étudie quelques propriétés de l'ensemble $\mathscr{H}_n$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{-1, +1\}$ dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

- L'outil principal de cette étude est la matrice de Gram d'une famille de vecteurs, dont le terme général est le produit scalaire $(x_i \mid x_j)$ d'éléments de la famille. Les résultats essentiels sur ce sujet sont établis dans les questions I.3 à I.5, ce qui permet de conclure la première partie par une majoration du déterminant des matrices de $\mathscr{H}_n$.
- Dans la partie II, ce résultat est utilisé pour préciser les valeurs possibles de n.
- Enfin, dans la partie III, on étudie une fonction sur $\mathscr{H}_n$. Hormis pour sa toute dernière question, la partie III est indépendante du reste de l'énoncé.

Ce sujet présente de manière progressive un thème d'étude classique, par des questions classiques ; il établit en outre les principaux résultats sur les matrices de Gram. Il constitue par conséquent un excellent sujet de révision sur les espaces euclidiens.

Indications

Partie I

I.3.a Utiliser la question I.2.b.

I.3.c Montrer, en le justifiant, que le déterminant de G est le produit de ses valeurs propres.

I.4 Écrire proprement la matrice obtenue en ajoutant à un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.

I.5.a Se souvenir que h_1 est orthogonal à x_2, x_3, ..., x_q.

I.5.b.ii Raisonner par récurrence.

I.6.a Utiliser (en le justifiant) le fait que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est la matrice de Gram du système de vecteurs $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

I.6.b Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}_n$, $\|c_i\| = \sqrt{n}$.

Partie II

II.2.a Interpréter ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ grâce à la question I.6.a.

II.3.c Utiliser abondamment le résultat de la question I.6.b.

II.4.a Se ramener à un calcul de déterminant par blocs.

II.5.a Obtenir cette matrice en multipliant une matrice de $\mathscr{H}_n$ par une matrice de $\mathscr{D}_n$ convenablement choisie. Montrer ensuite que la deuxième colonne contient autant de $+1$ que de -1.

II.5.b Utiliser la question précédente et permuter les lignes à l'aide de la question II.3.a.

Partie III

III.1 Se souvenir que toute matrice symétrique se diagonalise dans une base orthonormée.

III.3.b Utiliser (en le justifiant) le fait que les coefficients de Q_1 sont dans $[\,-1\,;1\,]$.

III.4.c Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{A}$ est une matrice orthogonale.

III.4.d Utiliser les résultats de la question III.2.b et l'unicité de la factorisation introduite à la question III.2.

Partie I

I.1.a Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. En notant ${}^t\mathrm{X} = (x,y,z,t)$,

$$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{M}) \iff \mathrm{M}\,\mathrm{X} = 0 \iff \left\{\begin{aligned} x+y+z-2t &= 0 \\ 2t &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ 2t &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2t &= 0 \end{aligned}\right.$$

ce qui permet de trouver ${}^t\mathrm{X} = (x, y, -x-y, 0)$ et de conclure que

$$\boxed{\big({}^t(1,0,-1,0),\ {}^t(0,1,-1,0)\big) \text{ est une base de Ker M.}}$$

De la même façon, en omettant les équations répétées plusieurs fois,

$$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,({}^t\mathrm{M}) \iff {}^t\mathrm{M}\ \mathrm{X} = 0 \iff \left\{\begin{aligned} x+z &= 0 \\ -2x+2y+2t &= 0 \end{aligned}\right.$$

ce qui donne ${}^t\mathrm{X} = (x, y, -x, x-y)$ et donc

$$\boxed{\big({}^t(1,1,-1,1),\ {}^t(0,1,0,-1)\big) \text{ est une base de Ker}\,({}^t\mathrm{M}).}$$

Cherchons les vecteurs X qui sont à la fois dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M})$ et dans $\mathrm{Ker}\,({}^t\mathrm{M})$. De tels vecteurs doivent vérifier en même temps les deux systèmes, c'est-à-dire que

$$\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{M}) \iff \left\{\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 2t &= 0 \\ x+z &= 0 \\ -2x+2y+2t &= 0 \end{aligned}\right. \iff x = y = z = t = 0$$

Le seul vecteur commun à $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M})$ et à $\mathrm{Ker}\,({}^t\mathrm{M})$ est $(0,0,0,0)$.

$$\boxed{\text{Il n'y a pas de relation d'inclusion entre Ker}\,(\mathrm{M}) \text{ et Ker}\,({}^t\mathrm{M}).}$$

I.1.b La base de $\mathrm{Im}\,(\mathrm{M})$ se détermine en lisant tout simplement les colonnes de M. On omet les vecteurs répétés plusieurs fois et ceux qui sont visiblement une combinaison linéaire des autres. On trouve ainsi $\mathrm{Im}\ \mathrm{M} = \mathrm{Vect}\,\big((1,0,1,0), (-2,2,0,2)\big)$. A priori cela ne fournit qu'une famille génératrice de Im M, mais comme cette famille ne contient que deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et donc

$$\boxed{\big({}^t(1,0,1,0),\ {}^t(-2,2,0,2)\big) \text{ est une base de Im M.}}$$

Pour ${}^t\mathrm{M}$ on procède de même, mais cette fois ci avec les lignes de M. On trouve que

$$\boxed{\big({}^t(1,1,1,-2),\ {}^t(0,0,0,2)\big) \text{ est une base de Im } {}^t\mathrm{M}.}$$

Soit X un vecteur qui est à la fois dans Im M et dans Im ${}^t\mathrm{M}$. Comme $\mathrm{X} \in \mathrm{Im\ M}$, ${}^t\mathrm{X} = (a-2b, 2b, a, 2b)$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. De même, ${}^t\mathrm{X} = (c, c, c, -2c+2d)$ avec $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. Or,

$$(a-2b \quad 2b \quad a \quad 2b) = (c \quad c \quad c \quad -2c+2d) \iff \left\{\begin{aligned} c &= a-2b \\ a &= 2b = c \\ 2b &= -2c+2d \end{aligned}\right.$$

L'unique solution de ce système est $a = b = c = d = 0$.

$$\boxed{\text{Il n'y a pas de relation d'inclusion entre Im}\,(\mathrm{M}) \text{ et Im}\,({}^t\mathrm{M}).}$$

I.2.a Si $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$,

$$\mathrm{AX} = 0 \quad\Longrightarrow\quad {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{AX} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{X} \in \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$$

Ainsi $\operatorname{Ker}\mathrm{A} \subset \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$.

Réciproquement, si $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})$,

$${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{AX} = 0 \implies \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{AX} = 0 \implies \|\mathrm{AX}\|^2 = 0 \implies \mathrm{AX} = 0 \implies \mathrm{X} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{A})$$

On vient de prouver que $\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) \subset \operatorname{Ker}\mathrm{A}$. En conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\mathrm{A}) = \operatorname{Ker}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A})}$$

En appliquant ce résultat à ${}^t\mathrm{A}$, on a immédiatement

$$\boxed{\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{A}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})}$$

I.2.b D'après le théorème du rang et la question précédente,

$$\operatorname{rg}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = n - \dim\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = n - \dim\operatorname{Ker}(\mathrm{A}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$$

et de même $\operatorname{rg}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A})$, donc

$$\boxed{\operatorname{rg}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A})}$$

I.2.c Comme on vient de montrer que $\operatorname{Im}(\mathrm{A})$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})$ ont la même dimension, il suffit de montrer qu'un de ces deux ensembles est inclus dans l'autre.

Or, si $\mathrm{Y} \in \operatorname{Im}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})$, alors il existe un vecteur X tel que $\mathrm{Y} = \mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}\ \mathrm{X}$. Mais alors Y est l'image de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{X}$ par A et donc $\mathrm{Y} \in \operatorname{Im}(\mathrm{A})$.

Ainsi $\operatorname{Im}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) \subset \operatorname{Im}(\mathrm{A})$ et par suite

$$\boxed{\operatorname{Im}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}) = \operatorname{Im}(\mathrm{A})}$$

En appliquant ce résultat à ${}^t\mathrm{A}$, on trouve

$$\boxed{\operatorname{Im}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = \operatorname{Im}({}^t\mathrm{A})}$$

I.3.a Notons c_{ij} les coefficients de ${}^t\mathrm{B}\,\mathrm{B}$ (avec $(i,j) \in {\mathbb{N}_q}^2$). On peut calculer c_{ij} à l'aide de la formule donnant le produit de deux matrices :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\, b_{kj}$$

Or précisément

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \langle x_i\,,\, x_j\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\, e_k\,,\, \sum_{k=1}^{r} b_{kj}\, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} b_{ki}\, b_{\ell j}\,\langle e_k\,,\, e_\ell\rangle \\
g_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\, b_{kj}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est obtenue en utilisant le fait que $\langle e_k\,,\, e_\ell\rangle = 1$ si $k = \ell$ et $\langle e_k\,,\, e_\ell\rangle = 0$ sinon. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{G} = {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{B}}$$