X Physique MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Fourmond (ENS Ulm) ; il a été relu par Emmanuel Loyer (Professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (ENS Ulm).

Ce sujet propose l'étude de mécanismes servant à amortir les vibrations mécaniques. Il se compose de quatre parties distinctes. Les trois premières, qui traitent essentiellement de mécanique du point, vont croissant dans la complexité de la modélisation d'une suspension pour véhicule :

- la première examine ce qui se passe en l'absence de suspension ;
- la deuxième traite le cas d'une suspension simple sans amortisseur ;
- la troisième rajoute un amortisseur dans la suspension.

La dernière partie, indépendante des précédentes, montre quant à elle l'utilisation possible d'un système fondé sur l'induction, via un aimant, pour réaliser l'amortisseur.

Ce problème ne comporte pas de réelles difficultés au niveau de la physique, les raisonnements restant relativement simples. En revanche, il est calculatoire : une grande importance est attribuée aux applications numériques, qui forment plus d'un tiers du problème. Il constitue un bon entraînement pour apprendre à mener des calculs (proprement) en temps limité. La question II.1.c est susceptible de poser de gros problèmes mathématiques en raison d'une formulation peu claire de l'énoncé.

Indications

Partie I

I.1.a Faire l'étude dans le référentiel lié au sol.

I.2.b Faire l'étude dans le référentiel terrestre et remarquer qu'au moment du décollage, la vitesse est ascendante.

Partie II

II.1.b Poser $z' = z_{\rm M} - \ell_1 - a/{\omega_0}^2$ et trouver la solution particulière pour z' en notation complexe. Ne pas oublier la solution homogène !

II.1.c Entendre par maximum de $f(x) = \mathrm{A}\cos ax + \mathrm{B}\cos bx$ la valeur $|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|$; on pourra éventuellement démontrer que dans le cas où a et b sont dans un rapport irrationnel, c'est bien la borne supérieure.

II.2.a Travailler dans le référentiel terrestre.

II.2.b Si la masse m ne décolle pas du sol, on a en permanence $x_m = x_{\rm s}$.

II.2.c Utiliser l'un des résultats intermédiaires de la question II.1.a pour écrire simplement $z_{\rm M} - z_{\rm s} - \ell_0$.

II.2.d Utiliser la même démarche qu'à la question II.1.c pour obtenir le « maximum » de $f(\omega)$.

II.4.b Ne pas oublier que K dépend aussi de β dans les applications numériques.

Partie III

III.1.e Examiner les comportements asymptotiques.

Partie IV

IV.1.b Attention : $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{u_z} \neq 0$!

IV.1.c Utiliser le fait que
$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}h}$$

IV.2.c Comme le système est isolé, la puissance totale dissipée doit être nulle.

I. Mouvement sans suspension

I.1.a Dans le référentiel non galiléen lié au sol, les forces appliquées à la masse M sont :

- son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = -\mathrm{M}\,g\,\overrightarrow{u_z}$;
- la réaction du support $\overrightarrow{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\,\overrightarrow{u_z}$;
- les forces d'inertie $\overrightarrow{f}_{\mathrm{ie}}$ et $\overrightarrow{f}_{\mathrm{ic}}$.

La réaction du support est normale au support car on néglige tout mouvement dans le plan du sol. Puisque le sol est animé d'un mouvement de translation par rapport au référentiel terrestre, que l'on supposera galiléen, la force de Coriolis est nulle ; les forces d'inerties se résument alors à

$$\overrightarrow{f}_{\mathrm{ie}} = -\mathrm{M}\,\overrightarrow{a_{\mathrm{e}}} = -\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{z_{\mathrm{s}}}}{\mathrm{d}t^2}$$

On notera z' la distance de la masse au sol. Ainsi, le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projetant sur l'axe (Oz),

$$\boxed{\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{M}\,z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - \mathrm{M}g + \mathrm{R}}$$

I.1.b Les conditions sur R sont

- $\mathrm{R} = 0$ si $z' > 0$;
- $\mathrm{R} \geqslant 0$ si $z' = 0$.

On a nécessairement décollement si à un instant donné l'accélération de la masse est dirigée vers le haut. Compte tenu de la forme de $\overrightarrow{\mathrm{R}}$, ceci se produit si

$$-z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - g > 0$$

La valeur correspondante de l'accélération du sol vaut

$$\boxed{a_{\mathrm{M}} = -g}$$

> Il fallait s'y attendre : la masse ne peut pas suivre le sol si celui-ci « tombe » plus vite que le ferait la masse toute seule.

Dans le cas où $|a_{\mathrm{s}}(t)| < |a_{\mathrm{M}}|$ à chaque instant, la quantité $-z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - g$ ne peut jamais devenir positive ; la masse reste donc **collée au sol**.

I.2.a La masse reste en contact avec le sol tant que $-z_0\,\omega^2\cos(\omega t) - g$ est négatif. Le décollage s'effectue donc pour t_0 tel que

$$z_0\,\omega^2\cos(\omega t_0) + g = 0$$

d'où
$$\cos(\omega t_0) = -\frac{g}{z_0\,\omega^2}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{z_{\mathrm{D}} = z_0\,(1 - \cos(\omega t_0)) = z_0 + \frac{g}{\omega^2}}$$

> On voit que $z_\mathrm{D} > z_0$; c'est normal puisque pour $z > z_0$, l'accélération est dirigée vers le bas, donc la force d'inertie vers le haut. Il ne peut y avoir décollement que si $z > z_0$.

I.2.b Étudions maintenant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre. Comme il est supposé galiléen et que la masse a décollé, il s'agit simplement d'une chute libre ; on a alors immédiatement, en posant l'origine de t' au moment du décollage,

$$z(t') = -g\,\frac{t'^2}{2} + v_{z0}\,t' + z_\mathrm{D}$$

où v_{z0} est la vitesse de M dans le référentiel terrestre au temps $t' = 0$. Celle-ci est

$$v_{z0} = +z_0\,\omega\sin(\omega t_0)$$

Puisque pour $t' < 0$, la masse est collée au sol, v_{z0} est la vitesse du sol à $t' = 0$, c'est-à-dire à $t = t_0$. L'altitude z_D est atteinte pour la première fois en phase ascendante, ce qui implique

$$v_{z0} = +z_0\,\omega\sin(\omega t_0) = +z_0\,\omega\sqrt{1-\cos^2(\omega t_0)} = z_0\,\omega\sqrt{1-\left(\frac{g}{z_0\omega^2}\right)^2}$$

Par simple dérivation, on trouve que l'altitude maximale est atteinte pour

$$t' = \frac{v_{z0}}{g}$$

donc $$z_\mathrm{M} = -\frac{{v_{z0}}^2}{2g} + \frac{{v_{z0}}^2}{g} + z_\mathrm{D} = \frac{1}{2g}\left({z_0}^2\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2}\right) + z_0 + \frac{g}{\omega^2}$$

Finalement, $$\boxed{z_\mathrm{M} = \frac{1}{2}\left(\frac{{z_0}^2\omega^2}{g} + \frac{g}{\omega^2}\right) + z_0}$$

I.2.c À partir de l'équation du mouvement établie à la question précédente, on voit que la masse M repasse en $z = z_\mathrm{D}$ pour

$$-g\,\frac{t'^2}{2} + v_{z0}\,t' = 0$$

soit $$t' = 2\,\frac{v_{z0}}{g}$$

La phase de vol libre dure donc

$$\boxed{t_\text{vol libre} = 2\,\frac{z_0\,\omega}{g}\sqrt{1-\left(\frac{g}{z_0\omega^2}\right)^2}}$$

> Il faut bien voir qu'il s'agit d'une approximation : la durée du vol libre est a priori différente de la durée au bout de laquelle la masse revient à son altitude de départ. En revanche, les équations menant à la durée réelle de vol libre ne sont pas solubles analytiquement, ce qui explique les hypothèses de l'énoncé.