Centrale Physique MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Aurélien Fraisse (Université de Princeton) ; il a été relu par Stanislas Antczak (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce problème se compose de quatre parties, pour l'essentiel indépendantes, recouvrant l'ensemble du programme d'électromagnétisme de deuxième année, ainsi que la conduction thermique dans les métaux et quelques méthodes d'électrocinétique.

- La première partie se propose d'étudier le champ électromagnétique pouvant régner dans un guide d'onde ou une cavité, ainsi que les différentes propriétés de la propagation de ces ondes dans de tels milieux. Assez progressives dans la difficulté, les questions sont très proches d'applications directes du cours et donc tout à fait abordables.
- Dans la deuxième partie, on étudie un analogue électrocinétique du problème précédent, puis les applications pratiques que peuvent avoir les dispositifs à guide d'onde. Cette partie, plus qualitative, est assez difficile d'accès. Les questions ne fournissent que peu d'indications alors que les raisonnements rigoureux ne sont pas aisés.
- La troisième partie propose l'étude thermodynamique d'un dispositif de chauffage par micro-ondes, ce qui se ramène à un problème de diffusion thermique avec sources. Certaines questions initiales sont assez délicates du fait d'imprécisions de l'énoncé, et on ne peut malheureusement pas continuer sans y avoir répondu. Les candidats étant parvenus à surmonter ces difficultés ont ensuite accès à une introduction à l'étude perturbative de la réponse d'un système soumis à une excitation périodique. La recherche d'analogies thermo-électriques conclut cette partie qui est, pour l'essentiel, calculatoire.
- Enfin, la dernière partie du problème revient sur le guide d'onde étudié au début, en considérant désormais ses parois comme des métaux non parfaits. Après avoir fait retrouver des résultats classiques de cours, le sujet se poursuit par l'étude des pertes énergétiques occasionnées par les parois. Ce dernier point se révèle à son tour délicat, l'énoncé étant parfois très peu clair dans ses définitions et ses questions.

En résumé, ce problème, plutôt long, est relativement difficile à aborder. Il permet néanmoins de tester les candidats sur les points les plus importants du cours d'électromagnétisme et de propagation des ondes, tout en offrant une ouverture intéressante sur des méthodes ou systèmes non étudiés en classes préparatoires. L'étude de ce sujet peut donc se révéler très constructive dans le cadre de la préparation aux concours.

Indications

I.A.1 Supposer l'existence d'un champ possédant les caractéristiques demandées, et étudier l'implication des conditions aux limites du problème sur celui-ci.

I.A.2.a Afin d'obtenir une condition sur $\sin\alpha$, penser que les conditions aux limites sont vérifiées uniquement par la somme du champ incident et du champ réfléchi.

I.A.2.b Pour établir que $\overrightarrow{E}$ est solution des équations de Maxwell, se souvenir que celles-ci sont linéaires.

I.B.3.b Utiliser l'équation de Maxwell-Faraday pour déterminer $\overrightarrow{B}$.

I.B.3.c Afin d'établir l'analogie recherchée, remarquer que l'énergie est stockée sous deux formes dans le guide d'onde et trouver quels composants électriques peuvent permettre de faire de même.

II.A.1 Bien que l'énoncé oublie de le préciser, le dipôle AB est constitué d'une infinité de cellules, et rajouter une cellule ne change donc pas l'impédance. Pour déterminer les signes, remarquer qu'une association de composants passifs ne peut être que de résistance positive, et étudier le cas $\omega \to 0$.

II.A.2 Dans l'un des deux cas étudiés à la question précédente, mettre en évidence la nécessité qu'une partie de l'énergie « s'échappe » à l'infini.

II.B.1.b Considérer les plans suffisamment fins et nombreux pour pouvoir assimiler l'objet étudié à une lentille plan-convexe d'indice n. On rappelle également que les lois de Descartes sur la réfraction sont équivalentes au théorème de Malus, mais le principe attendu par l'énoncé est hors-programme (principe de Fermat).

II.B.2.b Contrairement à ce qu'indique l'énoncé, considérer que l'onde se propageant ici est celle trouvée à la question I.A.2.b et non à la question I.B.3.a, et admettre que les trous sont identiques.

II.B.2.c La réponse attendue à cette question est visiblement erronée.

III.C.1 Pour déterminer les constantes d'intégration, utiliser les résultats de la question III.A.3.

III.E.1.b Pour établir l'analogie demandée, chercher quelles similitudes de comportement peuvent présenter les objets électriques proposés par l'énoncé avec la situation thermique étudiée.

IV.A.1.a Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss afin d'étudier ρ.

IV.A.1.c Montrer que k^2 peut être négligé devant un autre terme.

IV.A.2.c Calculer les deux termes de l'expression et montrer qu'ils sont égaux.

IV.B.3 Intégrer le résultat de la question IV.A.2.c sur tout un contour d'une section du guide, en y associant le résultat de la question IV.B.1.

IV.B.5.b Dans cette question, on considère que la perturbation induite par les pertes par effet Joule est suffisamment faible pour pouvoir considérer que les résultats établis dans toutes les questions précédentes de cette partie restent valables. En utilisant cette approximation et en effectuant un bilan de puissance sur une tranche $\mathrm{d}x$ de matériau en tenant compte de l'effet Joule, établir alors le résultat demandé.

I. Étude d'un guide d'onde et d'une cavité

A. Propagation d'une onde guidée

I.A.1 Le champ électrique complexe $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$ associé à l'onde décrite par l'énoncé s'écrit

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \underline{\mathrm{E}}_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_x x)}\, \overrightarrow{e_z}$$

où $\underline{\mathrm{E}}_0$ est a priori complexe, et k_x est la projection sur $(\mathrm{O}x)$ du vecteur d'onde associé à la propagation suivant cet axe.

Les deux plans en $y = 0$ et $y = b$ sont considérés comme des métaux parfaits : les champs électriques tangentiels à leurs surfaces doivent donc être nuls. Or, le champ électrique qu'on vient de définir est tangent à ces plans métalliques, d'où

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}\,(y = 0) = \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}\,(y = b) = \overrightarrow{0}$$

Ces deux conditions aux limites donnent le même résultat :

$$\underline{\mathrm{E}}_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_x x)}\, \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$$

Cette équation devant être vérifiée pour toute valeur de x, t et z, elle ne peut donc l'être que pour $\underline{\mathrm{E}}_0 = 0$ et ainsi

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \overrightarrow{0}$$

Il est par conséquent **impossible de faire se propager l'onde décrite par l'énoncé dans le milieu étudié**.

I.A.2.a Les lois de Descartes sur la réflexion des ondes électromagnétiques indiquent que l'onde réfléchie admet pour vecteur d'onde le vecteur $\overrightarrow{k_2}$ défini par

$$k_{2x} = k_{1x} \qquad \text{et} \qquad k_{2y} = -k_{1y}$$

où k_{ix} et k_{iy} désignent les projections du vecteur $\overrightarrow{k_i}$ $(i = 1, 2)$ sur $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$. Le vecteur $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2}$ est donc, avec $\underline{\mathrm{E}}'_0$ une constante complexe, de la forme

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = \underline{\mathrm{E}}'_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - \overrightarrow{k_2}.\overrightarrow{\mathrm{OM}})}\, \overrightarrow{e_z} = \underline{\mathrm{E}}'_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\left(\omega t - k_{2x} x - k_{2y} y\right)}\, \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = \underline{\mathrm{E}}'_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\left(\omega t - k_{1x} x + k_{1y} y\right)}\, \overrightarrow{e_z}$$

car $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2}$ garde la polarisation de l'onde incidente par réflexion sur le plan métallique. De plus, $k_{1x} = k_0 \cos\alpha$ et $k_{1y} = k_0 \sin\alpha$, où k_0 est la norme du vecteur $\overrightarrow{k_1}$ (on choisit cette notation, qui peut prêter à confusion au premier abord, pour se conformer aux notations de l'énoncé des questions suivantes). Ainsi,

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = \underline{\mathrm{E}}'_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x \cos\alpha + k_0\, y \sin\alpha)}\, \overrightarrow{e_z}$$

Pour déterminer $\underline{\mathrm{E}}'_0$, intéressons-nous aux conditions aux limites. Comme on l'a vu à la question précédente, la composante du champ électrique total parallèle à la surface des plans métalliques parfaits doit être nulle à la surface de ces plans. Dès lors,

$$(\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2})\,(y = 0) = (\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2})(y = b) = \overrightarrow{0}$$

Or, $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha - k_0\, y\, \sin\alpha)}\, \overrightarrow{e_z} + \underline{\mathrm{E}}'_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha + k_0\, y\, \sin\alpha)}\, \overrightarrow{e_z}$

Par conséquent, la condition aux limites en $y = 0$ donne

$$(\mathrm{E}_0 + \underline{\mathrm{E}}'_0)\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha)} = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de t et x, on obtient $\mathrm{E}_0 + \underline{\mathrm{E}}'_0 = 0$, ou encore, $\underline{\mathrm{E}}'_0 = -\mathrm{E}_0$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = -\mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha + k_0\, y\sin\alpha)}\, \overrightarrow{e_z}}$$

Le champ total s'écrit alors

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0 x\cos\alpha - k_0 y\sin\alpha)}\, \overrightarrow{e_z} - \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0 x\cos\alpha + k_0 y\sin\alpha)}\, \overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = \mathrm{E}_0\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha)} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k_0\, y\, \sin\alpha} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, k_0\, y\sin\alpha}\right) \overrightarrow{e_z}$$

soit $$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0 \sin(k_0\, y\sin\alpha)\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha)}\, \overrightarrow{e_z} \qquad (\mathbf{1})$$

La condition aux limites en $y = b$, qui doit être vérifiée pour toute valeur de x et de t, impose donc $\sin(k_0\, b\, \sin\alpha) = 0$, ou encore $k_0\, b\, \sin\alpha = p\,\pi$, avec $p \in \mathbb{Z}$. En utilisant $k_0 = 2\,\pi/\lambda_0$, on obtient

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{p\,\lambda_0}{2\,b} \qquad \text{avec} \qquad p \in \mathbb{N}^*} \qquad (\mathbf{2})$$

En effet, $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$ ne convient pas puisque $\alpha \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$ et donc $\sin\alpha > 0$.

I.A.2.b En reportant le résultat (2) dans l'équation (1), on trouve

$$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1} + \overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\, \sin\left(k_0 \frac{p\,\lambda_0}{2\,b}\, y\right) \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\, \cos\alpha)}\, \overrightarrow{e_z}$$

soit $$\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\, \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{p\,\lambda_0}{2\,b} y\right) \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha)}\, \overrightarrow{e_z}$$

ce qui donne $$\boxed{\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}} = -2\,\mathrm{i}\,\mathrm{E}_0\, \sin\left(\frac{p\,\pi\, y}{b}\right) \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega t - k_0\, x\cos\alpha)}\, \overrightarrow{e_z}}$$

La propagation se fait donc suivant la direction $(\mathrm{O}x)$. De plus, α est choisi dans l'intervalle $]\,0\,;\pi/2\,[$, ce qui impose $k_0\cos\alpha > 0$. **La propagation de l'onde se fait ainsi suivant $\overrightarrow{e_x}$.**

Le champ $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1}$ donné par l'énoncé ainsi que le champ $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2}$ que l'on a trouvé à la question I.A.2.a correspondent à des ondes planes, progressives et monochromatiques qui sont des solutions des équations de Maxwell. Ces dernières étant linéaires, toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_1}$ et $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}_2}$, et en particulier $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$, **est solution des équations de Maxwell**.

L'équation du champ $\overrightarrow{\underline{\mathrm{E}}}$ donne quant à elle directement l'expression du vecteur d'onde dans le guide :

$$\boxed{k_{\mathrm{g}} = k_0\cos\alpha}$$