X Maths 1 MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Lévy (ENS Ulm) ; il a été relu par Vincent Perrier (ENS Lyon) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Ce problème propose en trois parties d'étudier certaines propriétés des solutions des équations différentielles du type

$$x'(t) = a(t)x(t) + \mathrm{H}(x(t), t) \qquad (\mathbf{1})$$

où a et H sont continues.

- Dans la première partie, on étudie le cas où la fonction H ne dépend pas de x, ce qui conduit à étudier les solutions de l'équation différentielle linéaire

  $$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

  On s'intéresse en particulier à l'existence de solutions périodiques de cette équation différentielle. Cette partie donne essentiellement lieu à quelques questions de cours et permet de s'échauffer sur des calculs sans difficulté majeure.
- La deuxième partie traite des équations différentielles du type de l'équation ($\mathbf{1}$), que l'on étudie par une méthode classique de point fixe afin de déterminer des conditions d'existence de solutions périodiques.
- La troisième et dernière partie fait étudier la stabilité et la stabilité asymptotique de la solution nulle des équations différentielles du type

  $$x'(t) = a(t)x(t) + f(x(t))$$

  où f est une fonction qui s'annule en zéro.

Dans la lignée des épreuves de l'École polytechnique, cette épreuve d'analyse propose quelques questions calculatoires et, sans requérir abusivement l'utilisation de théorèmes complexes, demande beaucoup de réflexion et une bonne finesse de raisonnement, ainsi que calme et sang-froid pour trouver les bonnes majorations et les bons arguments dans les dernières questions.

Il s'agit d'une épreuve assez difficile, où la plupart des questions peuvent se résoudre de diverses manières. Cependant, la connaissance de méthodes classiques d'analyse, d'intégration et de résolution d'équations différentielles permet de s'en sortir.

Indications

Première partie

1 Que vérifie l'intégrale sur une période d'une fonction périodique ?

2.a Penser à la méthode de variation de la constante.

2.b Que donne le changement de variable $v = u - \mathrm{T}$ quand on intègre bg^{-1} ?

3.a Multiplier l'équation différentielle par un facteur e^{-int}, puis intégrer par parties.

Deuxième partie

4 Utiliser la question 2.a.

5 Pour montrer que $\mathrm{U_H}x$ est dans P, utiliser les questions 1 et 2.b.
Pour l'équivalence, dériver $\mathrm{U_H}x$ pour l'une des implications ; montrer que $x-\mathrm{U_H}x$ est solution de (**E1**) et utiliser la question 1 pour la réciproque.

6.b Utiliser le théorème des accroissements finis.

6.c Penser au théorème du point fixe.

7 Utiliser la question 5.

8 Se ramener à un problème de point fixe.

9.a Utiliser les formules trouvées aux questions 6.a et 6.b.

9.b Utiliser la question 8.

9.c Penser au changement de fonction inconnue $y = \dfrac{1}{x}$.

Troisième partie

10 Utiliser la question 4 pour pouvoir appliquer le résultat admis.

11 Utiliser la question 10 pour montrer que x et x' sont bornées sur leur domaine de définition. Montrer ensuite que la fonction x admet une limite finie en tout point et en conclure qu'elle est définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Terminer en utilisant à nouveau la question 10 pour obtenir la majoration souhaitée.

Première partie

1 Puisque la fonction a est continue sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t) \qquad (\mathbf{E1})$$

est le sous-espace vectoriel engendré par la fonction

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp\left(\displaystyle\int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u\right) \end{cases}$$

c'est-à-dire, l'ensemble $\{\lambda g \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi, pour que l'équation différentielle ($\mathbf{E1}$) admette des solutions T-périodiques non identiquement nulles, il faut et il suffit que la fonction g soit T-périodique. Or g est T-périodique si et seulement si la fonction $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u$ l'est. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\int_0^{t+\mathrm{T}} a(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u + \int_t^{t+\mathrm{T}} a(u)\,\mathrm{d}u$$

La fonction a étant périodique, son intégrale sur une période ne dépend pas de l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire que

$$\int_t^{t+\mathrm{T}} a(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\mathrm{T}} a(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{A}$$

soit
$$\int_0^{t+\mathrm{T}} a(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{A}$$

On en déduit que les fonctions $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t a(u)\mathrm{d}u$ et g sont T-périodiques si et seulement si $\mathrm{A} = 0$. Conclusion :

> L'équation différentielle ($\mathbf{E1}$) admet des solutions périodiques non identiquement nulles si et seulement si $\mathrm{A} = 0$.

> Comme c'est souvent le cas dans les épreuves de l'École polytechnique, cette première question est relativement facile. Il convient donc de la rédiger le mieux possible.

2.a Les fonctions a et b étant continues, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ($\mathbf{E2}$) est un espace affine de dimension 1, de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée ($\mathbf{E1}$). Ainsi, les solutions de ($\mathbf{E2}$) sont de la forme

$$y = \lambda g + y_{\mathrm{P}}$$

où y_{P} est une solution particulière de ($\mathbf{E2}$). Il reste donc à trouver une telle solution particulière.

Utilisons pour cela la méthode de la variation de la constante en cherchant des solutions sous la forme $y(x) = \lambda(x)g(x)$. On a

$$y' = \lambda' g + \lambda g' = \lambda' g + a y$$

donc $y = \lambda g$ est solution de (**E2**) si et seulement si $\lambda' g = b$, *ie* si et seulement si y est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = g(x)\left(\mathrm{C} + \int_0^x b(t)g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t\right)$$

En particulier, la fonction $y : x \longmapsto g(x)\displaystyle\int_0^x b(t)g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t$ est une solution particulière de (**E2**).

On en déduit que les solutions maximales de l'équation différentielle (**E2**) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{x \longmapsto \mathrm{C}\,g(x) + g(x)\int_0^x b(t)g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{C} \in \mathbb{R}}$$

> Il est aussi possible de trouver directement les solutions de (**E2**) à partir d'une solution de (**E1**). Soit x une fonction vérifiant
>
> $$x' = ax + b$$
>
> Alors, en divisant par g (qui ne s'annule pas), on trouve
>
> $$\frac{x'}{g} = \frac{ax}{g} + \frac{b}{g}$$
>
> soit $$\frac{x'}{g} - \frac{ax}{g} = \frac{b}{g}$$
>
> Comme g est solution de (**E1**), on reconnaît
>
> $$\left(\frac{x}{g}\right)' = \frac{x'}{g} + x\frac{-g'}{g^2} = \frac{x'}{g} - \frac{ax}{g}$$
>
> Il vient alors $$\left(\frac{x}{g}\right)' = \frac{b}{g}$$
>
> Il n'y a plus qu'à intégrer pour constater que la fonction x est de la forme
>
> $$x : t \longmapsto g\left(\int_0^t \frac{b(u)}{g(u)}\,\mathrm{d}u + c\right)$$
>
> où c est une constante d'intégration. En remontant les calculs, on vérifie que toute fonction de cette forme est solution de (**E2**), et qu'on a donc déterminé l'ensemble des solutions de (**E2**).

2.b Considérons une solution maximale de (**E2**) et fixons pour cela un réel λ quelconque. Pour que la fonction $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda g(x) + g(x)\displaystyle\int_0^x b(t)g(t)^{-1}\,\mathrm{d}t$ soit T-périodique, il faut et il suffit que la différence $\Delta(t) = f_\lambda(t+\mathrm{T}) - f_\lambda(t)$ soit nulle pour tout réel t.

Or, pour tout réel t, on calcule

$$\Delta(t) = \lambda g(t+\mathrm{T}) + g(t+\mathrm{T})\int_0^{t+\mathrm{T}} b(u)g(u)^{-1}\,\mathrm{d}u - \lambda g(t) - g(t)\int_0^t b(u)g(u)^{-1}\,\mathrm{d}u$$