CCP Maths 1 MP 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Dudas (ENS Ulm) ; il a été relu par Hicham Qasmi (ENS Lyon) et David Lecomte (Université de Stanford).

Le problème étudie certaines conditions suffisantes pour qu'une série de Fourier converge uniformément. Il ne nécessite néanmoins aucune connaissance approfondie sur ce sujet puisque la majorité des théorèmes sont rappelés. Il comporte trois parties qui peuvent se traiter indépendamment, quitte à admettre les résultats intermédiaires.

- La première partie fait état de plusieurs résultats sur la convergence des séries de Fourier, qui sont utiles pour la suite du problème. On s'intéresse aussi aux applications directes du théorème de Fejér.
- Dans la deuxième partie, on étudie un exemple précis de fonction dont la série de Fourier est divergente en un point. Cette fonction est définie comme la somme d'une série de fonctions, et son étude fait ainsi appel aux outils classiques d'analyse.
- Enfin, dans la troisième partie, on introduit l'ensemble des fonctions à variation bornée, qui englobe celui des fonctions $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On montre qu'une fonction continue et à variation bornée est la limite uniforme de sa série de Fourier. Quelques applications de cette nouvelle condition suffisante sont alors envisagées.

Ce sujet est bien adapté à la durée de l'épreuve ; la dernière partie est un peu plus difficile que les deux autres. Il ravira les candidats qui s'intéressent d'assez près à la théorie des séries de Fourier.

Indications

Première partie

1.b Que dire de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues ?

2 S'intéresser au nombre dérivé de φ à droite de 0.

3.b Remarquer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \ell \ = \ (n+1)\,\ell$.

4 Appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(\mathrm{S}_n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Deuxième partie

6 Quelle est la nature de la série $\sum 1/n^2$?

7.a Afin de simplifier l'intégrande, on utilisera la formule

$$\cos a\,\sin b \ = \ \frac{1}{2}\,(\sin(a+b) + \sin(b-a))$$

7.b Pour prouver la positivité, montrer que dans tous les cas $\mathrm{T}_{q,k}$ est une somme de termes positifs.

7.c Utiliser l'équivalent suivant :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$$

9 Calculer d'abord explicitement $\mathrm{S}_n(f)(0)$, puis minorer l'expression obtenue à l'aide du résultat de la question 8.

Troisième partie

10 On pourra examiner le cas où n devient grand.

11.a Calculer $\mathrm{V}(\sigma, f)$ pour une subdivision quelconque.

11.b Montrer plus généralement, à l'aide de l'inégalité triangulaire, qu'une somme de fonctions à variations bornées est également à variation bornée.

11.c Pour une subdivision σ donnée, considérer la subdivision formée de σ et des points de discontinuité de f'.

12 Considérer la concaténation d'une subdivision de $[\,a\,;c\,]$ et d'une subdivision de $[\,c\,;b\,]$.

13.a Montrer que $|f(t) - f(x_k)| \leqslant \mathrm{V}_k(f)$ pour tout réel t compris entre x_{k-1} et x_k .

13.b Calculer explicitement le membre de gauche de l'inégalité.

13.c Utiliser les deux questions précédentes.

14.b Utiliser le calcul de la question précédente et la majoration de $|u_k|$.

14.c Ne pas oublier d'utiliser le résultat de la question 5.

15 Considérer la suite $u_n \ = \ c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,x} + c_{-n}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\,x}$ et montrer que l'on peut supposer $u_n = 0$. Utiliser ensuite une suite (d_n) indépendante de x et utiliser le résultat de la question précédente.

16 Remarquer que φ est la somme de deux fonctions monotones sur $[\,0\,;2\pi\,]$.

17 Montrer qu'une fonction lipschitzienne est continue et à variation bornée sur tout segment.

I. Résultats préliminaires

1.a Le théorème de Dirichlet affirme que la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux converge simplement vers la quantité

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$$

où $f(x+0)$ (respectivement $f(x-0)$) désigne la limite à droite (respectivement à gauche) de f au point x. Autrement dit,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_p(f)(x) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))}$$

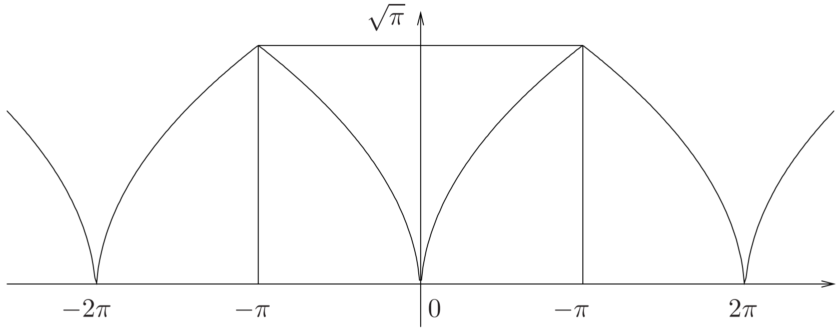
En particulier, la série de Fourier converge simplement vers f en tout point de continuité de f.

1.b Pour tout entier naturel p, $\mathrm{S}_p(f)$ est une fonction polynomiale trigonométrique donc continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, si f est limite uniforme de la suite $(\mathrm{S}_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$, elle est automatiquement continue sur $\mathbb{R}$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Finalement,

> Si f n'est pas continue, la série de Fourier de f ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

> Rappelons la preuve de la transmission de continuité par limite uniforme. Si (g_n) est une suite de fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ tendant uniformément vers g, alors par définition
>
> $$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)-g(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
>
> ce que l'on traduit par : pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,
>
> $$\exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)-g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$
>
> L'entier N étant lui aussi fixé, exprimons maintenant la continuité de g_{N} au point x_0 :
>
> $$\exists\, \alpha > 0 \quad \forall x \in \left]x_0-\alpha, x_0+\alpha\right[\qquad |g_{\mathrm{N}}(x)-g_{\mathrm{N}}(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$
>
> Grâce à l'inégalité triangulaire, on en déduit que, pour tout réel x dans l'intervalle $\left]\, x_0-\alpha\,; x_0+\alpha\,\right[$,
>
> $$|g(x)-g(x_0)| \leqslant |g(x)-g_{\mathrm{N}}(x)| + |g_{\mathrm{N}}(x)-g_{\mathrm{N}}(x_0)| + |g_{\mathrm{N}}(x_0)-g(x_0)|$$
> $$|g(x)-g(x_0)| \leqslant \varepsilon$$
>
> ce qui prouve bien que g est continue au point x_0.

2 Voici l'allure du graphe de φ :



La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$, étant donné que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]\,0\,;\pi\,[$. Cependant,

$$\forall x \in \;]\,0\,;\pi\,[\qquad \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

donc
$$\varphi'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

Ceci montre que φ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$. Or, par définition, une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle l'est sur tout segment de $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas de classe } \mathscr{C}^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

3.a Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ revient à écrire qu'au voisinage de $+\infty$,

$$u_n - \ell = \mathrm{o}(1)$$

La série de terme général constant égal à 1 est une série divergente et à termes positifs, si bien que la relation de négligeabilité précédente se transmet aux sommes partielles et on obtient

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \;=\; \mathrm{o}\Big(\sum_{k=0}^{n} 1\Big) \;=\; \mathrm{o}(n+1)}$$

3.b L'égalité précédente est équivalente à

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Or,
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell) \;=\; \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\ell \;=\; \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k - \ell$$

par conséquent
$$\boxed{\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell}$$

4 Supposons que la suite $(\mathrm{S}_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction g sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}_n(f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$$