Mines Maths MPSI — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Gadat (ENS Cachan) ; il a été relu par Thomas Chomette (ENS Ulm) et Aurélien Alvarez (ENS Lyon).

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants, le premier d'analyse, le second d'algèbre linéaire. Le premier problème est un petit peu plus difficile que le second, mais les questions sont bien enchaînées et progressives, ce qui permet une bonne compréhension de l'énoncé. Le second problème est plus aisé et ne fait intervenir que des notions de base d'algèbre linéaire.

Dans le problème d'analyse, la première partie s'attache à redémontrer des résultats classiques sur les sommes de cosinus. Les deux autres parties proposent le calcul de l'intégrale

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$$

à l'aide de techniques fondées sur les suites de fonctions, intégrations par parties, et fonctions intégrables.

Le problème d'algèbre linéaire est une introduction à l'algèbre des quaternions. On construit cette algèbre matriciellement avant d'y définir un produit scalaire et une projection orthogonale. On démontre également le résultat suivant : si deux entiers naturels sont somme de quatre carrés d'entiers, il en va de même de leur produit.

Indications

Premier Problème

1 Utiliser les rappels de trigonométrie donnés en début d'énoncé.

2.b Déduire de la formule trouvée à la question 1 que la suite est constante.

3.a Effectuer un développement limité de g en 0 pour en déduire la continuité.

3.c Appliquer un résultat classique du cours d'analyse sur le prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

5 On pourra calculer v_n en utilisant la relation de la question 1 et conclure grâce à la question précédente.

6 Utiliser la définition de f_n pour calculer X_n.

7.a Étudier ces intégrales avec le critère de Riemann.

9.a Calculer explicitement $\sigma_n(t)$.

10.a Calculer $\mathrm{J}_n(\beta) - \mathrm{J}(\beta)$ et utiliser le résultat de la question 9.a.

10.b Utiliser le résultat de la question 6.

10.c Conclure en utilisant les résultats des questions 5, 8 et 10.

Second Problème

11.a Démontrer que σ est involutive.

12.c Utiliser la question précédente et raisonner sur le déterminant.

15.b On pourra utiliser les résultats démontrés aux questions 12.c et 15.a.

16 Calculer le déterminant des matrices $\mathrm{M}(z_1, z_2)$.

17.a Se souvenir que H est un espace vectoriel stable par σ et par multiplication matricielle.

17.b Utiliser le résultat de la question 12.b.

19.b S'intéresser à la dimension de $\mathrm{F}^\perp$.

19.c Développer A dans la base $(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}, \mathrm{L})$ et montrer que l'on obtient la formule proposée.

Premier Problème

I. Quelques résultats préliminaires

1 Soient x un réel appartenant à $]\,0\,;\pi\,]$ et n un entier naturel non nul. Calculons la quantité suggérée par l'énoncé :

$$\sin\frac{x}{2}\,f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{x}{2}\cos(kx)$$

En utilisant la formule $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sin\frac{x}{2}\,f_n(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left((2k+1)\,\frac{x}{2}\right) + \sin\left((1-2k)\frac{x}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left((2k+1)\,\frac{x}{2}\right) - \sin\left((2k-1)\frac{x}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right) \\
\sin\frac{x}{2}\,f_n(x) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Enfin, x appartient à $]\,0\,;\pi\,]$ donc $\sin\dfrac{x}{2}$ n'est pas nul. On en déduit que

$$f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left((2n+1)\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

En conclusion, $\boxed{\forall x \in\,]\,0\,;\pi\,] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_n(x)}$ (**1**)

2.a La fonction f_n est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$, pour tout entier naturel n non nul. D'après (**1**), on a

$$\forall x \in\,]\,0\,;\pi\,] \qquad g_n(x) = 2f_n(x) + 1$$

En posant $g_n(0) = 2f_n(0) + 1$, il vient

$$g_n(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_n(x)$$

On en déduit que g_n est prolongeable par continuité sur $[\,0\,;\pi\,]$ avec, en conservant la notation g_n pour la fonction prolongée,

$$g_n(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_n(x) = 2f_n(0) + 1 = 2n + 1$$

Par ailleurs, si n est nul, la fonction g_n est constante égale à 1 sur $]\,0\,;\pi\,]$. Elle est donc également prolongeable par continuité en 0 en prenant $g_0(0) = 1$. Par conséquent,

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ g_n \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$

2.b Soit n un entier naturel. La fonction g_n étant continue sur $[\,0\,;\pi\,]$, on peut définir son intégrale sur cet intervalle. D'après la relation (**1**),

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\pi} g_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} (2f_n(x)+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi + 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} \\ u_n &= \pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante, de valeur } \pi.}$$

3.a Commençons par remarquer que g est bien définie et continue sur $]\,0\,;\pi\,]$. Pour étudier la continuité de g en 0, utilisons un développement limité. On a

$$\cos\frac{x}{\alpha} = 1 - \frac{x^2}{2\alpha^2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \mathrm{o}\left(x\right)$$

On en déduit
$$g(x) = \frac{\dfrac{x^2}{2\alpha^2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)}{\dfrac{x}{2} + \mathrm{o}\left(x\right)} = \frac{x}{\alpha^2} + \mathrm{o}\left(x\right)$$

d'où
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0 = g(0)$$

$$\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$$

3.b La fonction g étant le quotient de deux fonctions dérivables sur $]\,0\,;\pi\,]$ dont le dénominateur ne s'annule jamais, elle est dérivable sur cet intervalle.

$$\forall x \in \,]\,0\,;\pi\,] \qquad g'(x) = -\frac{\dfrac{1}{\alpha}\sin\dfrac{x}{\alpha}\,\sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{x}{\alpha} - 1\right)\cos\dfrac{x}{2}}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$$

Étudions la limite en 0 de cette quantité en utilisant à nouveau des développements limités :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{\dfrac{x^2}{2\alpha^2} + \mathrm{o}\left(x^2\right) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{2\alpha^2} - 1 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)}{\dfrac{x^2}{4} + \mathrm{o}\left(x^2\right)} \\ &= -\frac{\dfrac{x^2}{4\alpha^2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)}{\dfrac{x^2}{4} + \mathrm{o}\left(x^2\right)} \\ g'(x) &= -\frac{1}{\alpha^2} + \mathrm{o}\left(1\right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que
$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x) = -\frac{1}{\alpha^2}}$$