ENAC Mathématiques toutes filières — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) ; il a été relu par Pierre Nolin (ENS Ulm) et Thomas Chomette (ENS Ulm).

Ce sujet offre un bon panorama du programme de première année :

- L'algèbre est introduite par le biais d'une application définie sur l'espace des fonctions continues. On s'intéresse notamment aux conditions portant sur sa réciproque, à sa représentation matricielle restreinte aux fonctions trigonométriques ou aux polynômes de degré inférieur à un entier n.
- Les questions centrales sont consacrées aux polynômes et fractions rationnelles : division euclidienne, décomposition en éléments simples, intégration, etc.
- L'analyse, quant à elle, est omniprésente à travers les prolongements par continuité ou les développements limités.

Ce sujet n'est pas particulièrement difficile, mais les démonstrations rigoureuses sont longues à écrire, si bien que, le jour du concours, il faut savoir utiliser aux maximum les astuces pour sélectionner la bonne réponse.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie I

5 Remarquer que $f = \dfrac{g'}{\ln(1+g')}$.

6 Prendre la dérivée de la partie de f' qui est susceptible de changer de signe et dresser son tableau de variations.

9 Vérifier d'abord que g s'annule bien en 0.

10 Vérifier la condition d'annulation de g puis chercher les antécédents.

11 Écrire les images de f_1 et f_2 dans chaque base (v_1, v_2) et (u_1, u_2) pour voir laquelle convient.

Partie II

15 Utiliser (et démontrer au besoin) que si p/q est racine d'un polynôme $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n\, x^n$ avec p et q premiers entre eux, alors p divise a_0 et q divise a_{N}.

16 Quel rapport y a-t-il avec la question 15 ? Poser $\mathrm{X} = x\,(1+\mathrm{i})$.

17 Procéder à la division euclidienne de P par le polynôme déduit des racines trouvées à la question 16.

18 Les valeurs en 0 et en l'infini suffisent à choisir parmi les solutions proposées.

19 Faire apparaître des intégrales connues.

Partie III

21 Vérifier que f se prolonge bien en -1, 0 et 1.

25 Écrire le développement limité de $\ln(1+x)$ et exprimer le tout en fonction de $(t-1)$.

26 Développer le numérateur à l'ordre 4 et rechercher des simplifications.

30 Chercher le lien avec les questions précédentes (notamment en écrivant $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$).

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Partie I

1 La fonction g appartient à $\operatorname{Im} \mathrm{L}_\varphi$ si elle vérifie

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad f \in \mathrm{E}_1$$

Par conséquent, elle est continue et dérivable en tant que primitive d'une fonction continue et

$$g'(x) = \varphi(x)\, f(x)$$

Dans le cas où φ (elle aussi continue) ne s'annule pas, $f = \dfrac{g'}{\varphi}$ est bien définie et doit être **continue sur** $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{g'}{\varphi} \in \mathrm{E}_1}$$

Si φ s'annule, $g' = f\,\varphi$ doit s'annuler aux mêmes points et $\dfrac{g'}{\varphi}$ doit être prolongeable par continuité en ces points car f est continue.

☐ A ■ B ☐ C ■ D ☐ E

> Notons que la proposition A est nécessaire au fait que g appartienne à $\operatorname{Im} \mathrm{L}_\varphi$, mais pas suffisante. Comme il y a déjà deux réponses correctes et que le mode d'emploi précise qu'il y a 0, 1 ou 2 réponses correctes à une question, c'est une condition nécessaire et suffisante qui était attendue.
>
> Dans le cas où φ s'annule sur un intervalle entier, il est difficile de parler de prolongement par continuité. L'énoncé aurait gagné à être plus clair et écarter ces cas.

2 Dans le cas où $g(x) = e^x - x - 1$ et $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ (qui s'annule en 0),

$$g'(x) = e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{1+x^2} - 1 \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right) - 1 \end{aligned}$$

Soit

$$\varphi(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Par conséquent,

$$\frac{g'}{\varphi}(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{x}$$

et $\dfrac{g'}{\varphi}$ n'est donc pas prolongeable par continuité en $x = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ ne vérifie pas la condition de la question 1.}}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Dans le cas où $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ et $\varphi(x) = \ln(1 + x + x^2)$, φ s'annule en $x = 0$ et en $x = -1$. En outre,

$$\varphi(x) = \ln(1 + x\,(1 + x)) \qquad \text{et} \qquad g'(x) = x\,(1 + x)$$

En $x = 0$ $\qquad \varphi(x) \underset{0}{\sim} x \qquad$ et $\qquad g'(x) \underset{0}{\sim} x$

En $x = -1$ $\qquad \varphi(x) \underset{-1}{\sim} -(1 + x) \qquad$ et $\qquad g'(x) \underset{-1}{\sim} -(1 + x)$

d'où $\qquad \dfrac{g'}{\varphi}(x) \underset{0}{\sim} 1 \qquad$ et $\qquad \dfrac{g'}{\varphi}(x) \underset{-1}{\sim} 1$

Ainsi, $\dfrac{g'}{\varphi}$ est prolongeable par continuité aux zéros de φ avec $\dfrac{g'}{\varphi}(0) = \dfrac{g'}{\varphi}(-1) = 1$.

$$\boxed{g \text{ vérifie la condition de la question 1.}}$$

A B C D E

> Pour ce dernier cas, on pouvait aussi remarquer que $\dfrac{g'}{\varphi} = \dfrac{g'}{\ln(1 + g')}$ et utiliser l'équivalence $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$.

3 Il a déjà été montré à la question 1 que si g appartient à $\operatorname{Im} \mathrm{L}_\varphi$, alors

$$\boxed{f(x) = \frac{g'}{\varphi}(x)}$$

A B C D E

> L'énoncé suppose implicitement que φ ne s'annule pas sur un intervalle tout entier.
>
> Il est assez facile de trouver des contre-exemples pour invalider les autres propositions. En posant
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \cos x$$
>
> on obtient $\qquad g(x) = \sin x$
>
> ce qu'aucune des propositions A, B ou D ne vérifie.

4 On a vu dans le second cas de la question 2 que g'/φ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 donc

$$\boxed{f = \frac{g'}{\varphi} \text{ est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1.}}$$

A B C D E

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .