X/ENS Physique PSI 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Fourmond (ENS Ulm) ; il a été relu par Brahim Lamine (Enseignant-chercheur à l'Université) et Jean-Julien Fleck (ENS Ulm).

Ce sujet, long et complet, traite de manière assez exhaustive les ondes sismiques dans la Terre.

- On voit dans la première partie comment modéliser une onde sismique se propageant dans un milieu homogène. Cette partie fait intervenir des notions de mécanique, et constitue un complément à la connaissance du cours sur les ondes sonores dans les fluides.
- La deuxième se fonde sur la constatation expérimentale que la Terre n'est pas homogène, et introduit le modèle des rais, analogue pour les ondes sismiques de l'optique géométrique. On y redémontre quelques résultats intéressants d'optique géométrique, dont la trajectoire d'un rai dans un milieu soumis à un gradient d'indice.
- La troisième s'intéresse aux ondes de surface. Cette partie peut constituer une bonne révision des guides d'ondes. Elle est sensiblement plus calculatoire que les précédentes.
- La quatrième est, quant à elle, axée autour des modes propres d'oscillation en compression de la Terre. Une des questions (IV.3) est difficile et nécessite beaucoup d'initiatives, même si on peut la contourner.
- La dernière partie discute de la correction gravitationnelle à apporter aux calculs des parties précédentes.

Il s'agit d'un sujet long et assez difficile dans l'ensemble. De nombreuses questions des parties III et IV nécessite d'avoir bien compris la première partie. Les questions sont dans l'ensemble beaucoup moins guidées que dans la plupart des sujets des autres concours, et nécessitent de prendre des initiatives. Cela en fait un sujet très formateur, qui juge aussi bien le sens physique que la capacité à mener des calculs proprement.

Indications

Partie I

I.1 Qu'implique le signe de $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}(x)$ quant à la variation d'épaisseur d'une tranche de matériau située en x ?

I.3 Considérer une tranche du matériau, de section S et d'épaisseur dx. Quelle est sa variation de volume si elle est soumise à un champ de déplacements $\overrightarrow{u}(x)$?

I.4 Appliquer les lois fondamentales de la dynamique à un parallélépipède de volume dτ et utiliser les question I.2 et I.3.

Partie II

II.2 Se souvenir que $n = \dfrac{c_{\text{référence}}}{c_{\text{milieu}}}$. La loi de la réflexion n'a pas de raisons de changer.

II.3 Bien voir que l'angle entre AJ et JN vaut lui aussi θ.

II.4 Pour $\mathrm{P_MP}$, considérer le triangle rectangle d'hypoténuse AI.

II.6 Utiliser simplement les indications de pentes pour trouver c_1 et c_2. Ne pas oublier d'éliminer D_c dans la relation pour trouver H.

II.7 Montrer qu'on peut définir un angle $\theta(z)$ qui vérifie $\dfrac{\sin\theta(z)}{c_1(z)} = \mathrm{C^{te}}$ le long de la trajectoire du rayon. Le relier à dx et dz.

II.8 Remarquer que le terme en z est une dérivée en $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ pour effectuer l'intégration.

II.10 Montrer que la profondeur maximale d'une trajectoire s'exprime simplement en fonction de R et z_0.

II.12 Utiliser la question I.5.

Partie III

III.1 Il faut trouver une condition en $z = 0$, une en $z = -\infty$ et deux en $z = -\mathrm{H}$.

III.2 Utiliser la condition à la limite $z = -\infty$ pour aboutir à la forme demandée pour $\underline{f}_2$.

III.4 Utiliser les deux questions précédentes. Ne pas trop chercher à simplifier, la relation n'est pas simple.

III.6 Interpréter Λ comme une épaisseur de pénétration.

III.8 Par définition, la vitesse de groupe est $\mathrm{V_g} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$.

III.9 Interpréter les trois modes comme issus du même paquet d'onde initial.

III.10 Chercher une solution sous la forme $c(k) = c_2\,(1 - \alpha(k))$, et développer au premier ordre en α.

Partie IV

IV.2 Montrer que l'on peut écrire l'équation différentielle sous la forme

$$f(\mathrm{R}) = g(\mathrm{H})$$

où f et g font intervenir aussi les dérivées de R et H. En déduire que ces termes sont constants.

IV.3 C'est la question la plus difficile du sujet. Redémontrer la forme générale de la force élastique dans le cas de coordonnées sphériques en considérant la variation de volume d'une tranche sphérique et en supposant une réponse linéaire. En déduire la valeur de la force en $r = a$, et utiliser le fait qu'elle est nulle. Il est aussi acceptable, faute de pouvoir le démontrer rigoureusement, de supposer que $\phi(r = a) = 0$.

IV.4 Le spectre d'un événement brusque contient toutes les fréquences.

IV.6 On pourra effectuer une analogie avec les conclusions de la partie III.

Partie V

V.1 Se souvenir de la correspondance électrostatique-gravitation, et utiliser l'équivalent du théorème de Gauss sous sa forme locale.

V.2 Utiliser I.3.

V.3 Employer une démarche semblable à celle de la question I.4.

V.5 Utiliser les valeurs numériques de la question I.7.

I. Les ondes sismiques de volume

I.1 Le signe moins sert à s'assurer qu'on a bien une force de **rappel**. En effet, si $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} < 0$, le bloc d'épaisseur d$x$ au repos voit sa largeur diminuer. Il est donc normal que les forces du bloc sur l'extérieur soient orientées vers l'extérieur.

De même, si $\dfrac{\partial u_y}{\partial x} > 0$, le côté $x < x'$ du bloc est plus bas que le côté en x'. À nouveau, la force considérée est une force de rappel.

Cette force est une **réponse linéaire** du matériau à une déformation. Elle s'apparente à la loi de Hooke pour les ressorts. Il s'agit bien sûr d'une approximation, valable seulement dans le cas des faibles déformations. Des forces plus complexes doivent être envisagées dans le cas de déformations plus importantes, comme par exemple dans le cadre de la théorie de la plasticité (le matériau ne revient plus à sa position initiale) ou de la rupture.

On peut traduire l'équation de l'élasticité du matériau par une équation aux dimensions :

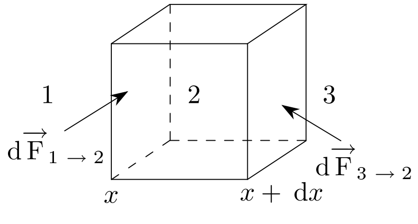
$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{S}]\,[\mu]\,\frac{[u]}{[x]}$$

dont on déduit que $$[\mu] = [\lambda] = [\mathrm{F}]\,[\mathrm{S}]^{-1}$$

μ et λ sont donc homogènes à des **pressions**.

> De façon générale, il est normal que la force élastique ne dépende pas de la valeur de $\overrightarrow{u}$, mais seulement de ses dérivées, car ajouter un déplacement $\overrightarrow{u}$ uniforme revient à effectuer une translation globale du matériau.
>
> Ce terme linéaire correspond simplement au premier terme d'un développement en série de la force en fonction des dérivées du déplacement. On retrouve ici l'idée des petites déformations (développement au premier ordre).

I.2 Examinons les forces élastiques qui s'appliquent sur le parallélépipède élémentaire. Il n'apparaît, par hypothèse de l'énoncé, que des contraintes sur les surfaces en x et en $x +$ dx. On a donc



$$\overrightarrow{f}_{\mathrm{v}}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{F}}_{1\to2} + \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{F}}_{3\to2}$$