Centrale Physique et Chimie PSI — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Lepage (Doctorant en mécanique des fluides) et David Lefranc (ENS Lyon) ; il a été relu par Stéphane Plat (École Centrale de Paris), Alexandre Hérault (Professeur en CPGE), Stéphane Ravier (ENS Lyon) et Bénédicte Éléna (ENS Lyon).

Le sujet est composé de cinq parties indépendantes. Les trois premières parties, ayant pour point commun l'émission de gaz dans une usine, font appel aux connaissances de mécanique des fluides et de thermodynamique du programme de physique. Les dernières parties proposent d'étudier les phénomènes de corrosion de certains métaux.

La partie I traite du tirage d'une cheminée. Elle utilise la statique des fluides ainsi que la thermodynamique des gaz.

Dans la partie II, on étudie le panache émis par la cheminée et son évolution, en fonction des caractéristiques de l'air environnant. On s'attache à définir le mouvement d'une particule afin d'en déduire le comportement du panache. Tout au long de cette partie, des explications qualitatives sont demandées.

La partie III est relative à la dispersion des polluants et s'appuie essentiellement sur des connaissances en diffusion moléculaire (loi de Fick). Les bilans, bien que classiques, nécessitent un grand soin. Pour finir, les applications numériques peuvent être traitées indépendamment du reste du problème, et rapportent des points facilement le jour du concours.

La partie IV concerne la thermodynamique. On aborde le diagramme d'Ellingham du cuivre, avant d'étudier un modèle de la cinétique de corrosion « sèche ».

La partie V porte sur les aspects cinétiques de la corrosion du zinc et du fer en milieu aqueux. Enfin, on s'intéresse à la protection d'un métal contre la corrosion, par contact avec du fer.

Le problème de chimie ne traite pas l'ensemble du cours mais fait appel à quelques connaissances de physique. Il peut servir de révision sur la thermodynamique chimique et les courbes intensité-potentiel. Le sujet est intéressant, tout en restant abordable et assez peu calculatoire.

Indications

I.A Utiliser l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant à l'intérieur de la cheminée.

I.B Calculer la masse volumique du gaz à l'aide de l'équation d'état, et utiliser la loi fondamentale de l'hydrostatique.

II.A.1 Ne pas oublier la poussée d'Archimède dans le bilan.

II.B.1 Remplacer la température par son expression dans la loi fondamentale de l'hydrostatique, puis intégrer pour déterminer la pression. Utiliser l'équation d'état pour trouver la masse volumique.

II.B.4 Écrire le principe fondamental de la dynamique aux altitudes z et $z + \delta z$, puis faire la différence pour obtenir une équation en δz.

II.B.6 Exprimer μ_{air} à partir de l'équation d'état, dériver cette expression par rapport à z et utiliser la variation linéaire de la pression par rapport à l'altitude (relation hydrostatique).

III.A Effectuer un bilan des particules diffusantes dans un cube élémentaire et remplacer le vecteur densité de particules par l'expression donnée par la loi de Fick.

III.C Déduire de la question III.A l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $c(x, y, z, t)$ dans le cas où D varie suivant x, y et z. Ajouter le terme de transport dû au vent et le comparer au terme de diffusion.

IV.A.2 Déterminer les zones d'existence des différentes espèces, puis étudier la variation de température à pression partielle en $\mathrm{O}_{2(\mathrm{g})}$ fixée.

IV.A.4.b Penser aux combinaisons linéaires de $\Delta_\mathrm{r}\mathrm{G}^\circ$.

IV.A.4.c Considérer le signe de $\Delta_\mathrm{r}\mathrm{G}^\circ$.

IV.A.5.a Bien écrire la réaction en prenant le coefficient stœchiométrique du dioxygène égal à 1 comme précédemment.

IV.A.5.b Penser à tracer le diagramme d'Ellingham.

IV.B.1 Erreur d'énoncé : exprimer le gradient en fonction de C_0, C_1 et x. Utiliser la première loi de Fick pour calculer dN.

IV.B.2 Calculer le flux de particules sortant.

IV.B.3 Exprimer la variation de masse de deux manières différentes.

IV.B.4 Erreur d'énoncé : les variables ont été interverties. Utiliser les deux questions précédentes.

IV.B.5 La condition initiale est que la couche d'oxyde a une épaisseur nulle à l'instant initial.

V.A.2 Penser aux surtensions.

V.A.4.c Raisonner par homogénéité : $1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A.s}$.

V.A.4.d Attention aux unités...

V.C.2 Erreur d'énoncé : il faut lire zinc et non cuivre. L'anode est le siège d'une oxydation et la cathode d'une réduction.

V.C.3 Attention au rapport des surfaces.

I. Tirage de la cheminée

I.A Sachant que l'écoulement des gaz est incompressible, permanent et non visqueux, on peut appliquer l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant entre la base de la cheminée et son extrémité supérieure. On obtient

$$p_{\text{base}} + \mu\, g\, z_{\text{base}} + \mu\,\frac{{v_{\text{base}}}^2}{2} = p_{\text{sortie}} + \mu\, g\, z_{\text{sortie}} + \mu\,\frac{{v_{\text{sortie}}}^2}{2}$$

Comme la vitesse à la base de la cheminée est nulle et $v_{\text{sortie}} = v_{\text{e}}$, on a

$$\mu\,\frac{{v_{\text{e}}}^2}{2} = \Delta\text{P} - \mu\, g\, h$$

soit
$$\boxed{v_{\text{e}} = \sqrt{\frac{2\,\Delta\text{P}}{\mu} - 2\,g\,h}}$$

I.B Utilisons la loi fondamentale de l'hydrostatique

$$\text{dP} = -\mu\, g\, \text{d}z$$

Il faut alors déterminer l'expression de μ en fonction de M_{air}. La masse volumique d'un gaz s'écrit

$$\mu = \frac{m}{\text{V}} = \frac{n\,\text{M}_{\text{air}}}{\text{V}}$$

Tous les gaz considérés obéissant à la loi des gaz parfaits, on a

$$\text{P}\,\text{V} = n\,\text{R}\,\text{T}_0$$

soit
$$\mu = \frac{\text{M}_{\text{air}}\,\text{P}}{\text{R}\,\text{T}_0}$$

On injecte cette expression dans la loi fondamentale de l'hydrostatique

$$\frac{\text{dP}}{\text{P}} = -\frac{\text{M}_{\text{air}}\,g}{\text{R}\,\text{T}_0}\,\text{d}z$$

Si l'on intègre cette équation entre le sol, d'altitude nulle, et une altitude z, on trouve

$$\boxed{\text{P}_{\text{ext}} = \text{P}_{\text{sol}}\,\exp\left(-\frac{\text{M}_{\text{air}}\,g}{\text{R}\,\text{T}_0}\,z\right)}$$

I.C.1 *Application numérique :*

$$\boxed{v_{\text{e}} = \sqrt{\frac{2\left(1-\exp\left(-\dfrac{\text{M}_{\text{air}}\,g}{\text{R}\,\text{T}_0}\,h\right)\right)}{\dfrac{0,72\,\text{M}_{\text{air}} + 0,12\,\text{M}_{\text{eau}} + 0,16\,\text{M}_{\text{CO}_2}}{\text{R}\,\text{T}_{\text{i}}}} - 2g\,h} = 18,9\ \text{m.s}^{-1}}$$

I.C.2 Le frottement du gaz sur les parois peut provoquer un ralentissement du fluide (perte de charge). En outre, le gaz refroidit au fur et à mesure qu'il monte dans la cheminée ; sa densité augmente et la poussée d'Archimède s'appliquant sur lui diminue. Par conséquent, sa vitesse d'élévation est plus faible que celle calculée théoriquement.

I.C.3 Soit d_{i} le diamètre interne de la cheminée et $\mathrm{Q_v}$ le débit volumique de celle-ci, on a

$$\mathrm{Q_v} = \iint \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = v_{\mathrm{e}} \frac{\pi {d_{\mathrm{i}}}^2}{4}$$

soit
$$\boxed{d_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{4\,\mathrm{Q_v}}{\pi v_{\mathrm{e}}}} = 1,37 \text{ m}}$$

II. Évolution du panache émis par une cheminée isolée

II.A.1 Soit le système constitué par une particule de fluide de masse m, de volume V et évoluant dans l'atmosphère. On se place dans le référentiel terrestre, que l'on suppose galiléen. La particule est soumise à :

- son poids : $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m_{\mathrm{g}}\,\overrightarrow{g}$
- la poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi} = -m_{\mathrm{air}}\,\overrightarrow{g}$

> La poussée d'Archimède est la force s'appliquant sur un objet immergé dans un fluide, de même direction que le poids mais de sens oppposé à celui-ci, et égale au poids de fluide déplacé par l'objet.

Écrivons le principe fondamental de la dynamique :

$$m_{\mathrm{g}}\,\overrightarrow{a} = m_{\mathrm{g}}\,\overrightarrow{g} - m_{\mathrm{air}}\,\overrightarrow{g}$$

On projette alors sur l'axe des z et on trouve l'équation du mouvement suivante :

$$\boxed{m_{\mathrm{g}}\,a = -m_{\mathrm{g}}\,g + m_{\mathrm{air}}\,g}$$

En divisant l'équation précédente par le volume d'une particule de fluide, on trouve

$$\mu\,a = -\mu\,g + \mu_{\mathrm{air}}\,g$$

soit
$$a = -\frac{\Delta\mu}{\mu}\,g$$

On intègre entre l'instant d'éjection de la particule de la cheminée ($t = 0$) et le temps t :

$$v(t) - v_{\mathrm{e}} = -\frac{\Delta\mu}{\mu}\,g\,t$$

On intègre de nouveau sur le même intervalle pour obtenir