CCP Physique 1 PSI 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Caudal (ENS Ulm) ; il a été relu par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) et Vincent Fourmond (ENS Ulm).

Ce sujet se compose de deux problèmes indépendants. Le premier, le plus long, est un sujet d'optique. Le second traite de mécanique et aborde le cas classique du pendule de Foucault.

Dans le premier problème, on étudie la réflexion totale dans un prisme, d'abord en optique géométrique selon les lois de Descartes, puis en affinant la description en optique ondulatoire. Il apparaît ainsi qu'une onde évanescente est en fait transmise. On se fonde sur les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique, et sur les équations de continuité des champs à la traversée de la surface séparant deux milieux. L'étape décisive est donc de bien poser ces équations.

On envisage ensuite d'utiliser cette onde évanescente pour réaliser un miroir à atomes. On crée une force répulsive d'interaction entre le champ et le dipôle induit par polarisation. Afin de pouvoir réfléchir un faisceau d'atomes, cette force doit l'emporter sur les forces de Van der Waals qui les attirent vers le milieu diélectrique. Toutefois, au-delà d'une vitesse d'agitation thermique maximale, la barrière de potentiel peut être franchie, et les atomes ne sont plus réfléchis. Cela oblige à utiliser des atomes froids.

On fait ensuite l'analogie courante entre une onde électromagnétique et un faisceau d'atomes se comportant comme une onde, grâce à la relation de Louis de Broglie. Dans la partie A.7, la plus difficile, on réalise ainsi une diffraction d'atomes en faisant onduler la surface du miroir.

Le second problème traite du pendule de Léon Foucault (1819-1868) qui est exposé au Panthéon à Paris. Il met en évidence la rotation de la Terre au travers de la perturbation qu'elle induit sur le mouvement d'un pendule. On étudie d'abord un pendule au pôle Nord, ce qui permet de revoir le cas du pendule simple dans un référentiel galiléen, avant d'aborder le cas général. Ce problème propose une description approchée, faisant appel au sens physique plutôt qu'aux équations de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

Ce sujet est assez long, mais la difficulté est progressive à l'intérieur de chaque partie.

Indications

Premier problème

A.2.b On peut se servir de la formule d'analyse vectorielle

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\ \overrightarrow{a}) - \triangle\,\overrightarrow{a}$$

A.2.d On rappelle que le plan d'incidence est défini par le vecteur d'onde incident, la normale au dioptre et le point d'incidence.

A.2.e Pour retrouver la relation qui lie $\overrightarrow{\text{E}}$ et $\overrightarrow{\text{B}}$ pour une onde plane, utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

A.2.h Remarquer qu'il suffit de montrer que $\overrightarrow{\text{B}'} \neq 0$.

A.2.k Le verre du prisme est en réalité décrit à la question A.1.c.

A.3.b Si le terme « semi-infini » paraît peu clair, considérer sur la figure 3 le demi-espace d'équation $z > \text{D}$.

A.5.a S'ils ont une énergie cinétique trop élevée, les atomes peuvent franchir la barrière de potentiel et ne sont pas réfléchis.

A.5.d Utiliser de préférence une relation de conservation, au lieu d'intégrer les équations du mouvement.

A.6.a On peut trouver trois grandeurs conservées, reliées aux trois dimensions de l'espace.

A.6.b Se servir des grandeurs conservées établies à la question précédente.

A.7.a Pour cette question, plus difficile et plus longue, remarquer que l'onde réfléchie par l'interface a la même amplitude que l'onde incidente et qu'elles sont simplement déphasées. La deuxième onde transmise s'exprime en adaptant l'expression de l'onde transmise à un vecteur d'onde incident différent. Ajouter les deux champs transmis. Poursuivre l'approximation de la question A.4.b en négligeant la dépendance temporelle en $e^{-j\omega t}$, ou bien repasser en notations réelles pour le calcul de E_{dip}.

Second problème

B.1.d Exprimer d'abord T en fonction de $\dot{\theta}$, puis utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour remplacer $\dot{\theta}$ par une fonction de θ, indépendante du temps.

B.2.d Après avoir vérifié que $\Delta\varphi \ll 1$, faire un développement limité au premier ordre en $\Delta\varphi$.

B.2.f Cette question est délicate. Appliquer la formule de composition des vitesses, en faisant attention à bien définir les différentes vitesses, ou raisonner à l'aide de la force de Coriolis.

A. Principe du miroir à atomes par champ évanescent

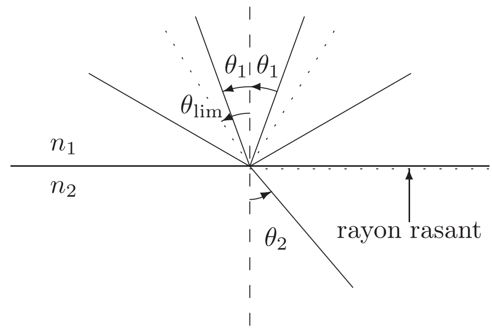
A.1. Phénomène de réflexion totale en optique géométrique

A.1.a S'il existe un rayon transmis, la loi de Snell-Descartes sur la réfraction s'écrit

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

Ce rayon transmis n'existe que si $|\sin\theta_2| \leqslant 1$, soit

$$\frac{n_1}{n_2} |\sin\theta_1| \leqslant 1$$



- Si $n_1 < n_2$, cette condition est vérifiée quel que soit l'angle d'incidence θ_1. Il existe toujours un rayon transmis lorsque la lumière passe d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent.
- Si $n_1 > n_2$, seuls les angles d'incidence tels que $|\sin\theta_1| \leqslant n_2/n_1$ donnent lieu à un rayon réfracté. L'angle d'incidence limite, au-delà duquel il n'y a pas de rayon réfracté, vérifie

$$\sin\theta_{\rm lim} = \frac{n_2}{n_1}$$

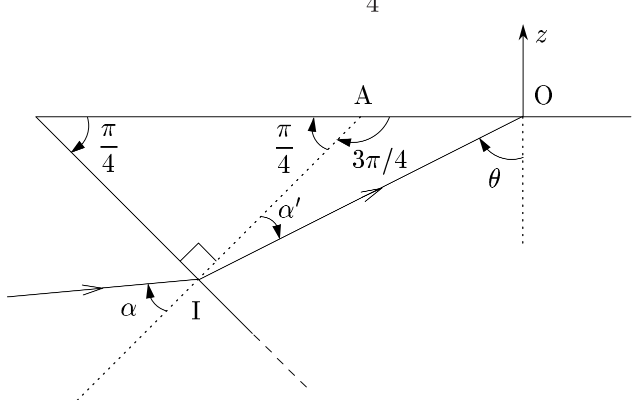
ou encore
$$\boxed{\theta_{\rm lim} = \text{Arcsin}\,\frac{n_2}{n_1}}$$

A.1.b Dans une **fibre optique**, la réflexion totale permet la propagation de lumière sans perte. Les conditions d'obtention de la réflexion totale sont réunies : un indice supérieur à l'indice de l'air ou de la gaine qui entoure la fibre, et des angles d'incidence supérieurs à l'angle limite ; en effet, les rayons sont pratiquement parallèles à l'axe de la fibre.

A.1.c Exprimons θ en fonction des angles α' puis α. La somme des angles du triangle AIO vaut π :

$$\alpha' + \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \pi$$

d'où
$$\alpha' = \theta - \frac{\pi}{4}$$



La loi de Descartes sur la réfraction s'écrit

$$\sin\alpha = n\sin\alpha' = n\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

La réflexion est totale si $\theta > \theta_{\rm lim}$ ce qui, compte tenu de la croissance de la fonction sinus sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$, se traduit par

$$\sin\alpha > n\sin\left(\theta_{\rm lim} - \frac{\pi}{4}\right)$$

d'où $$\boxed{\alpha > \text{Arcsin}\left[n\sin\left(\theta_{\rm lim} - \frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

et avec $$\theta_{\rm lim} = \text{Arcsin}\,\frac{1}{n} = 31,9°$$

on obtient $$\boxed{\alpha > -25,3°}$$

A.2. Ondes évanescentes dans le formalisme de Maxwell

A.2.a Le premier groupe d'équations de Maxwell est indépendant des sources et garde donc une forme immuable :

- Maxwell-flux $$\boxed{\text{div}\,\overrightarrow{\rm B} = 0} \qquad \textbf{(M-}\boldsymbol{\Phi}\textbf{)}$$

- Maxwell-Faraday $$\boxed{\overrightarrow{\rm rot}\,\overrightarrow{\rm E} = -\frac{\partial\overrightarrow{\rm B}}{\partial t}} \qquad \textbf{(M-F)}$$

Le second groupe d'équations de Maxwell s'écrit de façon générale dans un milieu matériel :

$$\begin{cases} \text{div}\,\overrightarrow{\rm D} = \rho^{\rm lib} \\ \overrightarrow{\rm rot}\,\overrightarrow{\rm H} = \overrightarrow{\jmath}^{\,\rm lib} + \dfrac{\partial\overrightarrow{\rm D}}{\partial t} \end{cases}$$

Or, dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et non magnétique,

$$\overrightarrow{\rm D} = \varepsilon_0\varepsilon_{\rm r}\overrightarrow{\rm E} = \varepsilon_0 n^2\,\overrightarrow{\rm E}$$

et $$\overrightarrow{\rm H} = \frac{\overrightarrow{\rm B}}{\mu_0} - \overrightarrow{\rm M} = \frac{\overrightarrow{\rm B}}{\mu_0}$$

Ainsi, $$\begin{cases} \text{div}\,\overrightarrow{\rm E} = \dfrac{\rho^{\rm lib}}{\varepsilon_0 n^2} \\ \overrightarrow{\rm rot}\,\overrightarrow{\rm B} = \mu_0\,\overrightarrow{\jmath}^{\,\rm lib} + \mu_0\varepsilon_0 n^2\dfrac{\partial\overrightarrow{\rm E}}{\partial t} \end{cases}$$

Enfin, comme il n'y a ici ni charges libres ni courants libres, on obtient les équations :

- Maxwell-Gauss $$\boxed{\text{div}\,\overrightarrow{\rm E} = 0} \qquad \textbf{(M-G)}$$

- Maxwell-Ampère $$\boxed{\overrightarrow{\rm rot}\,\overrightarrow{\rm B} = \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{\rm E}}{\partial t}} \qquad \textbf{(M-A)}$$