X/ENS Maths PSI 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Julien Lévy (ENS Ulm) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Le sujet traite d'équations différentielles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cependant, un bon tiers des questions porte sur des résultats assez classiques d'algèbre linéaire. Les autres questions proposent de démontrer des propriétés très simples sur les solutions de ces équations. Les questions vraiment techniques n'interviennent généralement qu'à la fin des parties. Seules ces dernières questions font intervenir des résultats précédents, de sorte que les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

- En guise de préliminaires, on propose de redémontrer les propriétés classiques de l'exponentielle de matrices. C'est presque du cours (même si ce cours est à la limite du programme de la filière PSI).
- La première partie traite d'une équation différentielle faisant intervenir le crochet de Lie de deux matrices. On commence par démontrer quelques résultats simples d'algèbre linéaire, puis on montre que les solutions de cette équation ont un spectre constant. Enfin, de la résolution d'un cas particulier au niveau des conditions initiales, on déduit une méthode générale pour résoudre l'équation.
- La deuxième commence par des résultats d'algèbre linéaire (plus complexes cependant). On se sert ensuite de ces résultats pour résoudre un système de la forme donnée dans la partie précédente.
- La troisième partie propose de résoudre un problème de physique où des particules se déplacent sur une droite, chacune étant repoussée par ses voisines. On montre que pour une certaine modélisation de la force de répulsion, le système différentiel composé des vitesses et des positions des n particules se ramène à un système de la forme précédente, et on en déduit la solution à ce problème.

Le sujet est long. Certaines questions sont assez techniques, notamment celles où l'on demande de montrer que certaines applications définies sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Il est vivement conseillé de s'intéresser au début de chaque partie, notamment à toutes les questions d'algèbre linéaire, puisque ce sont des résultats importants qui introduisent des techniques utiles.

Indications

Préliminaires

1 Montrer que pour toutes matrices A et B, la norme de AB est inférieure au produit des normes de A et de B.

2 Montrer la relation $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$ pour toutes matrices A et B qui commutent. On pourra pour cela introduire la grandeur

$$\Delta_n = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\mathrm{A}^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{B}^j}{j!}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^k}{k!}$$

3 Montrer que la série de fonctions $\sum t^k \mathrm{B}^k/k!$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[\,-a\,;a\,]$.

4 Passer à la limite.

I. Équation de Lax

I.1.d Montrer que si A et B sont triangulaires inférieures, alors pour tous indices $i < j$, le coefficient $(\mathrm{AB})_{i,j}$ est nul.

I.2.a Utiliser la relation liant A^{-1} et la comatrice de A. Dériver ensuite l'égalité $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathbb{1}$.

I.4.a.i Écrire $\mathrm{B}(t) = \mathbb{1} + \mathrm{B}'(0)t + \mathrm{o}(t)$ puis chercher à écrire $\det \mathrm{B} = \det \mathbb{1} + \mathrm{C}t + \mathrm{o}(t)$, le but étant de trouver la valeur de C.

I.4.a.ii Considérer pour tout t l'application $s \mapsto \mathrm{B}(t+s)\mathrm{B}(t)^{-1}$.

I.4.b Utiliser le résultat de la question précédente et l'équation différentielle vérifiée par L.

I.5.a Utiliser la question précédente pour montrer qu'il existe D une matrice diagonale, telle que pour tout t, $\mathrm{L}(t)$ est semblable à D.

I.5.b Utiliser le résultat de la question I.2.b.

I.5.c Utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz.

I.6 Utiliser le résultat de la question 3.

II. Décomposition de matrices

II.1.b Le plus ardu est de montrer que l'inverse B d'un élément A de $\mathcal{P}_n$ est dans $\mathcal{P}_n$. Pour cela, montrer par récurrence sur les lignes que les coefficients de chaque ligne sont tous nuls au-dessus de la diagonale.

II.1.c Pour toute matrice triangulaire inférieure M, exprimer les éléments de la diagonale de M^k en fonction de ceux de M. En déduire les éléments diagonaux de $\exp \mathrm{M}$.

II.1.d Dériver la relation ${}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R} = \mathbb{1}$.

II.2.a Raisonner en termes de bases de $\mathbb{R}^n$. Utiliser alors le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur les vecteurs colonnes de B.

II.2.b Il y a deux façons de procéder : soit montrer que la construction des bases dans la question précédente se fait de manière unique, soit montrer dans un premier temps que l'intersection de $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{O}_n$ est réduite à $\mathbb{1}$.

II.2.c Montrer que les vecteurs construits suivant le procédé de la question II.2.b sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de la variable t.

II.3.a Dériver la relation $\exp(t\mathrm{B}) = \Pi_1\big(\exp(t\mathrm{B})\big)\Pi_2\big(\exp(t\mathrm{B})\big)$ et utiliser le résultat de la question I.1.d pour en déduire $\pi_1\Big[\Pi_1\big(\exp(t\mathrm{B})\big)^{-1}\mathrm{X}\Pi_1\big(\exp(t\mathrm{B})\big)\Big]$.

III. Réseau de Toda

III.1 Utiliser le théorème de Cauchy-Lispschitz.

III.2 Utiliser les équations différentielles pour montrer que la dérivée est nulle. En particulier, exprimer $e^{2(q_i-q_{i+1})}$ en fonction des $({p_i}')$.

III.5 Remarquer que $\mathrm{M} = \pi_1(\mathrm{L})$. Calculer LM et déduire des symétries de L et M une relation entre LM et ML. Pour trouver la forme de la solution, utiliser le résultat de la question II.3.b.

III.6 Pour trouver la forme de $\Pi_1(\exp(t\mathrm{X}))$, utiliser les formules obtenues par la construction de la base orthonormée à la question II.2.a.

Préliminaires

1 Montrons d'abord la propriété suivante, concernant la norme sur $\mathcal{M}_n$ introduite par l'énoncé :

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n \qquad \mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})\ \mathrm{N}(\mathrm{B})$$

Pour cela, il est plus commode d'introduire une définition équivalente de la norme de l'énoncé, mais qui soit plus souple. Soit x un élément de $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$. On pose $y = x/||x||$. Le vecteur y est alors de norme 1 et on a :

$$\frac{||\mathrm{A}y||}{||y||} = ||\mathrm{A}y|| = \frac{||\mathrm{A}x||}{||x||}$$

d'où l'on déduit que les trois formules suivantes donnent la même définition :

$$\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{||\mathrm{A}x||}{||x||} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}\\ ||x||\leqslant 1}} \frac{||\mathrm{A}x||}{||x||} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ ||x||=1}} ||\mathrm{A}x||$$

Servons-nous de la première définition pour montrer la propriété voulue. Pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$, on pose $y = \mathrm{B}x$. Si y est nul, la norme de $\mathrm{AB}x$ est nulle et sinon, on a

$$\frac{||\mathrm{AB}x||}{||x||} = \frac{||\mathrm{AB}x||}{||\mathrm{B}x||}\ \frac{||\mathrm{B}x||}{||x||} = \frac{||\mathrm{A}y||}{||y||}\ \frac{||\mathrm{B}x||}{||x||}$$

De cette égalité, il vient pour tout x non nul

$$\frac{||\mathrm{AB}x||}{||x||} \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{||\mathrm{A}y||}{||y||} \sup_{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{||\mathrm{B}x||}{||x||}$$

donc
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{||\mathrm{AB}x||}{||x||} \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{||\mathrm{A}y||}{||y||} \sup_{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \frac{||\mathrm{B}x||}{||x||}$$

soit
$$\boxed{\mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})\ \mathrm{N}(\mathrm{B})}$$

On déduit de cette propriété que la norme de B^k est inférieure à $\mathrm{N}(\mathrm{B})^k$, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{B}^k}{k!}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{N}(\mathrm{B})^k}{k!} \leqslant e^{\mathrm{N}(\mathrm{B})}$$

La série de matrices est donc absolument convergente dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ complet, et par conséquent :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}^k}{k!} \text{ est convergente.}}$$

> La norme introduite par l'énoncé peut en fait être définie pour toute application linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie (généralement désignée sous le nom de norme triple – ou triple norme, ou encore norme subordonnée – et notée $|||\ \cdot\ |||$). Sur un espace de dimension infinie, il y a équivalence entre le fait que cette norme soit bien définie et le fait que l'application linéaire soit continue (au sens usuel, pour la distance induite par la norme de l'espace vectoriel).