Mines Maths 1 PSI — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (ENS Cachan) ; il a été relu par Moez Ajmi (École Polytechnique) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite d'équations différentielles linéaires du second ordre de la forme $-y'' + hy = f$. L'objectif est de trouver des solutions en imposant des valeurs nulles aux extrémités 0 et 1.

- La première partie a pour but de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de ces solutions. Cette partie est assez simple (voire « trop » simple) car on y examine des cas élémentaires. Il n'y a aucune difficulté particulière pour résoudre les questions.
- Dans la seconde partie, les fonctions qui interviennent dans l'équation différentielle sont supposées périodiques et impaires. On se sert alors de la théorie de Fourier pour trouver des solutions. Il faut prendre garde au fait que les fonctions considérées sont 2-périodiques et non pas 2π-périodiques comme à l'accoutumée.

Le sujet est, dans l'ensemble, plutôt abordable.

Indications

Première partie

2 Commencer par montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée. Montrer ensuite que sa dérivée est également de classe $\mathscr{C}^1$.

3 Introduire la fonction $\Psi = \Phi_1 - \Phi$ et utiliser la question 1.

5 Dériver deux fois l'expression donnée par l'énoncé.

7 Faire une majoration grossière de l'expression de la question 5.

8 Prendre pour x un point en lequel y atteint son maximum dans l'inégalité de la question précédente. En déduire une minoration sur H.

Seconde partie

9 Utiliser la parité de $\widetilde{\mathrm{G}}_x$ pour ramener l'intégrale sur $[\,0\,;1\,]$, puis séparer l'intégrale en deux intégrales de 0 à x et de x à 1.

10 Remarquer que $\widetilde{\mathrm{G}}_x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

11 Utiliser le résultat de la question 9. Prendre garde au fait que l'on travaille cette fois ci sur des fonctions de deux variables.

12 Utiliser l'expression trouvée à la question 5.

13 Utiliser le résultat de la question 11.

14 Plutôt que de recalculer les coefficients de f, établir une relation entre cette fonction et G. Pour les coefficients de u, utiliser la question 13.

15 Utiliser à nouveau la question 13.

17 Introduire $z_n(x) = b_n(z)\sin(n\pi x)$. Utiliser alors le fait que la série de Fourier de f converge normalement pour en déduire que les séries de fonctions $\sum z_n$, $\sum z_n'$ et $\sum z_n''$ convergent normalement (on pourra chercher des majorations des normes de ces fonctions en fonction des coefficients $b_n(f)$).

Première partie

La fonction h est égale à une constante et la fonction f est nulle

$\boxed{1}$ On suppose que la fonction f est nulle et que h est égale à une constante α. L'équation devient ainsi :

$$-y'' + \alpha\, y = 0$$

> Rappelons que les équations linéaires du second ordre à coefficients constants $y''+ay'+by$ se résolvent de la manière suivante : on pose l'équation du second degré associée :
>
> $$\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b = 0$$
>
> Il faut considérer trois cas :
>
> - Si le polynôme admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, une base des solutions est donnée par les fonctions
>
> $$t \mapsto e^{\lambda_1 t} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto e^{\lambda_2 t}$$
>
> - Si le polynôme admet une racine réelle double λ, une base des solutions est alors donnée par les fonctions
>
> $$t \mapsto e^{\lambda t} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto te^{\lambda t}$$
>
> - Si le polynôme admet deux racines complexes conjuguées $\lambda = \pm i\,\omega$, une base des solutions est alors donnée par les fonctions
>
> $$t \mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad t \mapsto e^{\lambda t}\sin(\omega t)$$

Trois cas se présentent alors :

- $\boldsymbol{\alpha > 0}$ **:** posons $\alpha = \omega^2$. Une base de l'espace vectoriel des solutions est alors donnée par les deux fonctions

  $$t \mapsto e^{\omega t} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto e^{-\omega t}$$

  Soit y une solution de (**S**). Il existe deux constantes A et B telles que

  $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \mathrm{A}e^{\omega t} + \mathrm{B}e^{-\omega t}$$

  La condition $y(0) = 0$ implique par conséquent $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$ soit $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$. Ainsi $y(1) = \mathrm{A}\left(e - e^{-1}\right)$. En outre, $e - e^{-1}$ est non nul et la condition $y(1) = 0$ implique que A est nulle, si bien que la fonction y l'est également.

- $\boldsymbol{\alpha = 0}$ **:** l'équation devient $y'' = 0$. Par conséquent, si y est une solution de (**S**), y' est constante et y est une fonction affine. Il existe ainsi deux constantes A et B telles que

  $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B}$$

  Les conditions aux limites imposent $y(0) = \mathrm{B} = 0$ et $y(1) = \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$. On en déduit que A et B sont nulles, puis que la fonction y l'est également.

- **$\alpha < 0$:** posons $\alpha = -\omega^2$. Une base des solutions est donnée par

  $$t \mapsto \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad t \mapsto \sin(\omega t)$$

  Soit y une solution de (**S**). Il existe deux constantes A et B telles que

  $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)$$

  La condition $y(0) = 0$ implique $\mathrm{A} = 0$ d'où $y(1) = \mathrm{B}\sin(w)$. Si $\omega/\pi \in \mathbb{Z}$, $\sin(\omega)$ est nul et toute fonction de la forme $y(t) = \mathrm{B}\sin(\omega t)$ est solution de (**S**). Dans le cas contraire, $\sin(\omega) \neq 0$ et la condition $y(1) = 0$ impose que B soit nulle et, par conséquent, que la fonction y le soit également.

Finalement :

$$\boxed{\text{Si } \alpha \neq -(n\pi)^2 \ (n \in \mathbb{N}^*), \text{ la seule solution de } (\mathbf{S}) \text{ est la solution nulle.}}$$

Une expression de la solution du système (S)

2 La fonction φ étant continue, les fonctions $t \mapsto t\varphi(t)$ et $t \mapsto (1-t)\varphi(t)$ le sont également. Φ, primitive d'une fonction continue, est alors de classe $\mathscr{C}^1$, avec

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \left[-\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + (1-x)x\varphi(x)\right] + \left[\int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - x(1-x)\varphi(x)\right] \\ &= -\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que Φ' est elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$ comme somme de deux primitives de fonctions continues. Φ est par conséquent de classe $\mathscr{C}^2$, avec

$$\Phi''(x) = -x\varphi(x) - (1-x)\varphi(x) = -\varphi(x)$$

On vérifie enfin facilement que $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

> Attention aux erreurs de signe ! Rappelons que :
>
> $$\left(\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

3 Soit Φ_1 une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Posons $\Psi = \Phi_1 - \Phi$. On sait d'après ce qui précède que

$$\Psi''(t) = \Phi_1''(t) - \Phi''(t) = -\varphi(x) - (-\varphi(x)) = 0$$

D'autre part, en vertu des hypothèses sur Φ_1 et de la question précédente,

$$\Psi(0) = \Phi_1'(0) - \Phi'(0) = 0 - 0 = 0$$

De même, $\Psi(1) = 0$. La fonction Ψ est donc solution du système (**S**) dans le cas où h et f sont toutes deux nulles. On a vu à la question 1 que dans ce cas, la seule solution du système est la fonction nulle. Par conséquent, Ψ est nulle d'où $\Phi_1 = \Phi$.