Centrale Physique 2 PC 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Michaël Berhanu (ENS Lyon) ; il a été relu par Vincent Fourmond (ENS Ulm) et David Chapot (ENS Lyon).

Ce sujet traite des différents aspects de la polarisation de la lumière. Il nécessite de bien connaître le TP-cours correspondant, mais aussi de maîtriser certains aspects expérimentaux. À travers ce sujet, la plupart des questions classiques faisant intervenir la polarisation des ondes lumineuses sont abordées. En outre, deux processus de création des ondes polarisées sont étudiées de manière exhaustive : la réflexion en incidence de Brewster et la polarisation par diffusion de la lumière. Ces deux phénomènes sont souvent cités en exemple en cours, mais ne font que rarement l'objet d'un développement. La construction du sujet impose de commencer par la première partie. On rencontre quelques questions difficiles dans le problème, mais leurs résultats ne sont pas nécessaires pour poursuivre l'épreuve. Les nombreuses questions qualitatives demandent une certaine expérience expérimentale, ainsi qu'un peu d'imagination.

La première partie sert de préliminaires pour le reste du problème. Dans un premier temps, les outils généraux d'étude des ondes lumineuses doivent être retrouvés à travers les premières questions. Puis on définit de manière générale le phénomène de polarisation. Enfin, on introduit les vecteurs de Jones qui permettront de traiter les phénomènes de polarisation dans un formalisme matriciel.

La seconde partie est de loin la plus longue. On calcule tout d'abord les facteurs de transmission en énergie à la traversée de polariseurs, avant d'étudier la polarisation par réflexion en incidence de Brewster. Ensuite, la biréfringence et son utilisation pour construire des lames demi-onde et quart d'onde sont abordées. Enfin, l'exemple du filtre de Lyot utilise les résultats précédents pour former un monochromateur.

La troisième partie, courte et très qualitative, rappelle d'abord quelques résultats utiles sur le dipôle oscillant puis aborde, sans calcul, l'influence de la diffusion sur la polarisation d'une onde lumineuse.

Indications

I.A.3.b On calcule l'intensité moyenne en notation complexe grâce à la relation

$$\mathrm{I} = \left\| \operatorname{Re}\left(\frac{\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}}^{\star}}{2\,\mu_0} \right) \right\|$$

I.B.2.b Pour déterminer l'orientation d'une polarisation elliptique ou circulaire, on peut choisir un couple de valeurs pour t et z (comme $t = 0$ et $z = 0$), de telle sorte que la composante E_x du champ électrique soit maximale. Déterminer alors le signe de $\dfrac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial t}$ et en déduire le sens de parcours.

I.C.1 La notation du produit scalaire proposée par l'énoncé est inhabituelle en optique et peut être une source d'erreur. Dans la suite du problème, on calcule les normes de vecteurs complexe par $\mathrm{A}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{A}}\|^2 = \overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}^{\star}}$.

I.C.4 Pour décomposer une onde quelconque en deux ondes circulaires, passer d'abord par la décomposition en deux ondes rectilignes.

II.A.3.b Cette question est délicate. Une méthode est de projeter le champ électrique après le premier polariseur selon les axes du second, puis de calculer son intensité après celui-ci, sans oublier de faire la moyenne temporelle.

II.B.5.a Considérer aussi le dénominateur.

II.B.5.b Prendre le cas simple où le premier rayon réfléchi part de l'interface air/verre et peut être d'intensité nulle, puis calculer les coefficients de réflexion et de transmission en énergie correspondants.

II.C.1 Se souvenir que $v = c/n$.

II.D.2 Utiliser les matrices de Jones. Prendre garde à l'ordre des matrices. On peut au choix calculer l'intensité pour $\mathrm{N} = 4$ mais le calcul est assez long, ou bien la calculer pour N quelconque, ce qui est plus difficile mais plus instructif. Dans ce dernier cas, calculer d'abord les produits matriciels de la droite vers la gauche, en mettant le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{\mathrm{N}} \big(1 + \exp(i\,2^k \alpha_1)\big)$ en facteur. Ensuite, montrer par récurrence que ce produit s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{m=0}^{2^{\mathrm{N}+1}-1} \exp(i\,m\alpha_1)$. Enfin, écrire la somme des termes d'une suite géométrique.

III.A.2 Attention, le régime n'est pas statique et $\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{V} + \dfrac{\partial \overrightarrow{\mathrm{A}}}{\partial t}$.

III.B.2 Traiter les cas d'une polarisation selon (Oz) et selon (Oy).

I. Phénomène de polarisation de la lumière

A. Onde électromagnétique plane progressive

I.A.1 Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ s'écrit en fonction de la longueur d'onde λ dans le milieu :

$$\boxed{\overrightarrow{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u}}$$

I.A.2 Pour une onde plane progressive et harmonique, l'équation de Maxwell

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{E}} = -\frac{\partial\overrightarrow{\text{B}}}{\partial t}$$

se développe en notation complexe :

$$i\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\underline{\text{E}}_0} = i\omega\,\overrightarrow{\underline{\text{B}}_0}$$

En remarquant que $c = \omega/k$, le champ magnétique devient :

$$\boxed{\overrightarrow{\underline{\text{B}}_0} = \frac{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\underline{\text{E}}_0}}{c}}$$

L'équation de Maxwell $\quad \text{div}\ \overrightarrow{\text{E}} = 0$

se réécrit en formalisme complexe : $i\,\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\underline{\text{E}}_0} = 0$

Cette équation et l'expression de $\overrightarrow{\underline{\text{B}}_0}$ impliquent que l'onde électromagnétique est transverse et que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{E}}, \overrightarrow{\text{B}})$ est un trièdre orthonormé direct.

> Cette question montre que pour une onde plane progressive harmonique dans un milieu assimilable au vide, il n'est pas nécessaire de chercher à déterminer le champ magnétique ; la connaissance du champ électrique suffit.

I.A.3.a Le vecteur de Poynting instantané s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{R}}(\text{M}, t) = \frac{\overrightarrow{\text{E}}(\text{M}, t) \wedge \overrightarrow{\text{B}}(\text{M}, t)}{\mu_0}}$$

Il représente le flux d'énergie d'une onde électromagnétique par unité de surface, c'est-à-dire la puissance par unité de surface que transporte l'onde. Sa direction est, pour ce type d'onde, la direction de propagation donnée par $\overrightarrow{u}$ (ceci n'est plus vrai en valeur instantanée pour une onde évanescente).

> Attention : l'expression précédente n'est valable que pour des champs réels.

En notation complexe, on utilise l'expression suivante :

$$\left\langle \overrightarrow{\mathrm{R}} \right\rangle = \underline{\overrightarrow{\mathrm{R}}} = \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}}^\star}{2\,\mu_0}\right)$$

donnant le flux d'énergie par unité de surface moyenné sur une période de l'onde (ce qui explique le facteur 1/2). $\underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}}^\star$ est le vecteur complexe conjugué du champ magnétique.

> Ce vecteur est souvent nommé « vecteur de Poynting complexe ».

I.A.3.b L'intensité de l'onde au point M a pour expression :

$$\mathrm{I} = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, t) \right\rangle \cdot \overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n}$ représente le vecteur unitaire normal à la surface à travers laquelle on calcule l'intensité. Sous incidence normale,

$$\mathrm{I} = \| \langle \overrightarrow{\mathrm{R}}(\mathrm{M}, t) \rangle \|$$

En utilisant l'expression du vecteur de Poynting en formalisme complexe, on a :

$$\mathrm{I} = \left\| \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}}^\star}{2\,\mu_0}\right) \right\|$$

En remplaçant $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}$ par son expression, l'intensité devient

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\,\mu_0\,c}\,\| \mathrm{Re}\,(\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}^\star)) \|$$

En développant avec la formule du double produit vectoriel, il vient

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\,\frac{(\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \cdot \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}^\star)\,\overrightarrow{u}^\star - (\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \cdot \overrightarrow{u}^\star)\,\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}^\star}{\mu_0\,c}$$

Sachant que

- $\overrightarrow{u}^\star = \overrightarrow{u}$ pour une onde homogène (résultat faux pour une onde évanescente) ;
- $\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \cdot \overrightarrow{u} = 0$;
- $(\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}} \cdot \underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}^\star)\,\overrightarrow{u} = |\underline{\mathrm{E}}_0|^2\,\overrightarrow{u}$,

on aboutit à $\mathrm{I} = |\underline{\mathrm{E}}_0|^2 / 2\mu_0$. Enfin, la relation $\varepsilon_0\,\mu_0 = 1/c^2$ permet de conclure :

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{\varepsilon_0\,c\,|\underline{\mathrm{E}}_0|^2}{2}}$$

I.A.4 Les phénomènes faisant intervenir la nature vectorielle de la lumière, c'est-à-dire ceux où la polarisation entre en compte, sont ceux mettant en jeu une anisotropie. Par exemple, on peut citer la biréfringence ou la réflexion et la réfraction à l'interface de deux milieux d'indices différents.

> La polarisation de la lumière intervient dans le phénomène d'interférences car en sommant les amplitudes, on additionne des vecteurs. En particulier, deux ondes dont les polarisations rectilignes sont orthogonales n'interfèrent pas. On dit que les deux ondes sont incohérentes par leur polarisation.