Centrale Physique 1 PC 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre-Marie Billangeon (ESPCI); il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet propose deux problèmes ayant trait à la physique des bulles et des gouttes; comme l'indique l'énoncé, ils peuvent être traités indépendamment.

- Dans le premier, on étudie l'évolution d'un système constitué de deux bulles sphériques d'eau savonneuse reliées entre elles par un tube. Dans un premier temps, on développe une approche qualitative du problème en s'appuyant sur la loi de Laplace, puis on cherche à prédire l'évolution du système par une approche quantitative consistant à étudier son potentiel enthalpie libre G^*. Dans un second temps, on s'intéresse aux transitions de phase dans un système analogue où les bulles de savon sont remplacées par des ballons, pour lesquels l'évolution de la pression en fonction du rayon ne suit plus la loi de Laplace.
- Le second est consacré à l'étude du phénomène de Leidenfrost, par lequel une goutte d'eau déposée sur une plaque fortement chauffée entre en lévitation. On s'attache d'abord à développer une approche qualitative du problème, puis on étudie trois modèles visant à prédire le temps de vie d'une goutte, l'objectif étant de déterminer lequel est le plus pertinent. Il convient d'insister sur le fait que chacune des hypothèses faites dans le cadre de ces modèles est essentielle: le bon candidat est celui qui sait tirer partie de chacune d'elles, et montrer en quoi elles sont toutes nécessaires.

Ce sujet propose une synthèse des différentes notions abordées pendant les cours de thermodynamique et de mécanique des fluides sur un thème original. L'énoncé peut paraître long à première vue, mais il expose clairement les hypothèses et donne de nombreux résultats qu'il n'est pas besoin de redémontrer. Il est peu calculatoire, et requiert un excellent sens physique ainsi qu'une bonne maîtrise de l'analyse dimensionnelle.

Indications

Première partie

I.A Penser au manomètre différentiel à liquide.

I.C.2 Relier ΔG^* au terme de création d'entropie $S_{\text{créée}}$.

I.C.3.b Montrer que $p_0 \, dV_i + \sigma \, d\Sigma_{mi} = p_i \, dV_i$.

I.C.3.c L'évolution du système étant monotherme, $dT = 0$.

I.C.3.d Comme on étudie un système fermé, $dN_2 = -dN_1$.

I.C.4 Penser à la loi des gaz parfaits, à la loi de Laplace, ainsi qu'à la conservation de la matière.

I.D.2.a Étudier la concavité du graphe de G^* en observant le signe de $d^2G^*/d{r_1}^2$.

I.D.3 Utiliser la loi des gaz parfaits pour exprimer N_i en fonction de r_i, puis montrer que $dN_i/dr_i > 0$.

Deuxième partie

II.B.1 Écrire l'équation de la diffusion thermique.

II.B.5 Écrire la loi de Fourier.

II.B.7.b Considérer que la masse de vapeur d'eau formée par unité de temps est égale à la variation de masse de la goutte d'eau par unité de temps, puis utiliser le résultat de la question II.B.7.a. Attention lors du calcul du volume car la goutte est une demi-sphère.

II.C.2 Utiliser le principe fondamental de la dynamique, ainsi que l'expression de la variation de la quantité de mouvement par unité de temps $d\overrightarrow{P^*}/dt$ du système fermé $(\mathcal{S}^*)$ déterminée à la question II.C.1.b. Faire l'inventaire des forces extérieures agissant sur $(\mathcal{S}^*)$.

II.C.3 Utiliser les résultats établis aux questions II.B.7.a et II.C.2.

II.C.4 Écrire l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dy}{y^{1/2}} = C^{te} \, dt$$

On a alors une équation différentielle à variables séparables que l'on sait intégrer.

II.D.1 Utiliser la propriété d'incompressibilité de l'écoulement pour justifier la conservation de la masse.

II.D.2.b Utiliser le théorème de Bernoulli entre un point quelconque (r, z), et un point au bord de l'écoulement $(r = a, z)$.

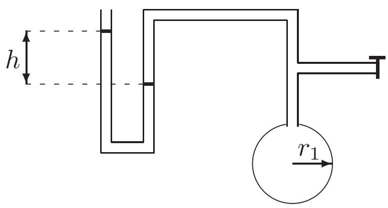
II.D.3 Étudier séparément la résultante des forces de pression sur la face inférieure et sur la face supérieure de la goutte.

II.E.4 Se rappeler que dans le cas d'un écoulement incompressible, $\operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0$.

I. Échanges entre une grosse bulle et une petite bulle

I.A Loi de Laplace

I.A Pour mesurer la différence de pression $(p_1 - p_0)$, on peut utiliser un manomètre différentiel à liquide, appelé aussi tube piézométrique. On raccorde à la bulle un tube en U, rempli d'un liquide de masse volumique ρ. L'autre bras du tube en U étant à la pression atmosphérique normale p_0, il y a une différence de pression $(p_1 - p_0)$ entre les deux extrémités du tube, qui se manifeste par une différence de niveau du liquide entre les deux bras.



On mesure h avec une règle graduée. Comme $p_1 = p_0 + \rho\, g\, h$, on peut déterminer la différence de pression entre l'air dans la bulle et l'atmosphère :

$$\boxed{p_1 - p_0 = \rho\, g\, h}$$

> Pour améliorer la sensibilité de ce type de mesure, il faut utiliser un liquide de faible masse volumique ρ : de cette manière, on réduit l'incertitude de mesure.

I.B Approche qualitative

I.B Prenons le cas où $r_1 > r_2$: selon la loi de Laplace, cela implique que $p_1 < p_2$. Du fait de cette surpression dans la bulle (2), des molécules de gaz sont chassées de la bulle (2) vers la bulle (1), entraînant une augmentation du nombre de moles de gaz N_1 dans la bulle (1). Comme $\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}r_i < 0$, $\mathrm{d}p_1 < 0$ et $\mathrm{d}p_2 > 0$: ceci implique que p_1 diminue et que p_2 augmente, donc que la différence de pression entre les deux bulles augmente.

En conclusion, le rayon des bulles évolue du fait de la différence de pression entre les deux bulles, et c'est la petite bulle qui se vide dans la grosse. Ce résultat est lié au fait que $\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}r_i < 0$: une différence de pression entre les deux bulles ne peut qu'augmenter.

I.C Approche quantitative

I.C.1 On appelle potentiel thermodynamique toute fonction qui permet de caractériser l'évolution d'un système sous des conditions extérieures données. Un potentiel thermodynamique

- doit décroître lors d'une évolution spontanée du système ;
- présente un minimum lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique.

I.C.2 D'après le premier principe de la thermodynamique, la variation d'énergie interne du système s'écrit $\Delta U = Q + W_{ext}$. Comme il n'échange pas de travail autre que celui des forces de pression avec l'extérieur, il vient $W_{ext} = -p_0\,\Delta V$, d'où $\Delta U = Q - p_0\,\Delta V$. Or, on considère une transformation monotherme ($\Delta T = 0$) et monobare ($\Delta p_0 = 0$), donc

$$\Delta G^* = \Delta U - T\,\Delta S + p_0\,\Delta V \qquad \text{soit} \qquad \Delta G^* = Q - T\,\Delta S$$

En outre, dans le cas d'une transformation monotherme, on a d'après le second principe de la thermodynamique :

$$\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}} = \frac{Q}{T} + S_{\text{créée}} \qquad \text{où} \qquad S_{\text{créée}} \geqslant 0$$

Par conséquent, $$\Delta G^* = -T\,S_{\text{créée}} \leqslant 0$$

Il reste à déterminer si G^* vérifie les deux propriétés énoncées à la question I.C.1. D'une part, l'entropie créée $S_{\text{créée}}$ est une grandeur positive pour toute transformation, donc G^* décroît lors d'une évolution spontanée du système. D'autre part, on dit qu'il y a équilibre thermodynamique quand le système est dans un état stationnaire et que $S_{\text{créée}} = 0$ si bien que lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique, $\Delta G^* = 0$ et par conséquent G^* présente bien un minimum.

I.C.3.a Comme le système est en évolution monotherme ($dT = 0$) et monobare ($dp_0 = 0$), on a

$$dG^* = dU - T\,dS + p_0\,dV$$

L'énergie interne du système {gaz + membranes} s'écrit

$$U = \underbrace{U_1 + U_2}_{\substack{\text{Énergie interne de}\\ \text{l'air dans les deux bulles}}} + \underbrace{U_{m1} + U_{m2}}_{\substack{\text{Énergie interne}\\ \text{des membranes}}}$$

donc $$dU = dU_1 + dU_2 + dU_{m1} + dU_{m2}$$

De même, l'entropie du système {gaz + membranes} s'écrit

$$S = \underbrace{S_1 + S_2}_{\substack{\text{Entropie de}\\ \text{l'air dans les deux bulles}}} + \underbrace{S_{m1} + S_{m2}}_{\substack{\text{Entropie}\\ \text{des membranes}}}$$

d'où $$T\,dS = T\,dS_1 + T\,dS_2 + T\,dS_{m1} + T\,dS_{m2}$$

Enfin, le volume du système {gaz + membranes} s'écrit $V = V_1 + V_2$, donc

$$p_0\,dV = p_0\,(dV_1 + dV_2)$$

On peut ainsi écrire

$$dG^* = dU_1 + dU_2 - T\,dS_1 - T\,dS_2 + p_0\,(dV_1 + dV_2) + dU_{m1} + dU_{m2} - T\,dS_{m1} - T\,dS_{m2}$$

Or, les énergies internes des parois des deux bulles vérifient l'identité thermodynamique

$$dU_{mi} = T\,dS_{mi} + \sigma\,d\Sigma_{mi} \qquad \text{soit} \qquad dU_{mi} - T\,dS_{mi} = \sigma\,d\Sigma_{mi}$$

On trouve finalement

$$\boxed{dG^* = dU_1 + dU_2 - T\,dS_1 - T\,dS_2 + p_0\,(dV_1 + dV_2) + \sigma\,d\Sigma_{m1} + \sigma\,d\Sigma_{m2}}$$

> Les énergies internes U_i et U_{mi}, les entropies S_i et S_{mi} et les volumes V_i sont bien additifs car ce sont des grandeurs extensives qui se rapportent à des systèmes disjoints.