Mines Maths 2 PC 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Aurélien Alvarez (ENS Lyon) ; il a été relu par Paul Pichaureau (Professeur en CPGE), Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) et Walter Appel (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux parties et le lien entre elles se fait dans les dernières questions du problème. On apportera un soin tout particulier à la rédaction, notamment dans la deuxième partie où il est question de géométrie affine euclidienne. Le début du problème exige quant à lui de bien connaître les structures algébriques usuelles : espace vectoriel, groupe, algèbre.

On s'intéresse d'abord à l'espace vectoriel $\mathbf{C}$ défini comme le produit cartésien de l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 3 par lui-même. On se donne notamment une loi de composition interne multiplicative faisant de $\mathbf{C}$ une algèbre réelle, associative et unitaire. La fin de cette partie a pour but l'étude d'un sous-ensemble de $\mathbf{C}$, noté $\mathbf{G}$, dont on démontre qu'il s'agit d'un groupe ; après avoir caractérisé deux de ses sous-ensembles, on termine sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément appartienne à $\mathbf{G}$.

Dans la deuxième partie, on commence par établir un résultat préliminaire très utile pour la suite, concernant l'image d'un produit vectoriel par rotation. On s'intéresse ensuite à une caractérisation des droites affines au moyen de deux vecteurs, pour en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux couples de vecteurs définissent une même droite. Enfin il est question d'images de droites par des déplacements, et l'on montre qu'il existe un isomorphisme entre le groupe des déplacements de l'espace affine euclidien et le groupe $\mathbf{G}$ de la première partie.

Indications

Première partie

4 Construire une application « naturelle » entre **H** et $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ et commencer par vérifier qu'il s'agit bien d'un morphisme de groupes.

6 Écrire la définition de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$.

Seconde partie

7 Décomposer le vecteur $\overrightarrow{a}$ suivant la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ et calculer l'image de cette base par l'endomorphisme $p_{\vec{a}}$.

8 Montrer l'égalité après avoir l'avoir projetée sur un vecteur quelconque de $\mathbf{E_3}$ pour faire apparaître des produits mixtes.

9 Utiliser le résultat de la question précédente.

11 Calculer le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$.

12 Utiliser les résultats établis aux questions 10 et 11.

14 Utiliser la question 12 pour construire une droite à partir d'un élément de **P**.

15 Calculer l'image du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ par le déplacement d, après avoir paramétré les points M de D. Identifier l'expression obtenue avec la paramétrisation analogue de D′.

16 On remarquera que $\mathrm{P}_{\vec{a}}$ est une matrice antisymétrique quel que soit le vecteur $\overrightarrow{a}$.

17 Traduire en termes d'endomorphismes les égalités $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ et $\mathrm{B} = \mathrm{B}'$.

19 D'après la question 17, il ne reste qu'à montrer la surjectivité. L'existence d'une rotation est immédiate et on cherchera à montrer que B s'écrit comme le produit d'une matrice antisymétrique avec A.

20 Utiliser les résultats des questions 14 et 15 et traduire le problème sous forme matricielle pour discuter l'existence d'une droite invariante.

Première partie

1 De manière générale, si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ désignent deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, alors le produit cartésien $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ (muni de la loi interne et de la loi externe précisées dans l'énoncé) est un espace vectoriel de dimension $n + p$.

Dans notre cas, $\mathbf{E} = \mathbf{F} = \mathbf{M}$, et $\mathbf{M}$ est un espace vectoriel réel de dimension 9.

$$\boxed{\mathbf{C} \text{ est un espace vectoriel réel de dimension } 9 + 9 = 18.}$$

> Pour se convaincre du résultat précédent, il suffit de considérer l'ensemble des couples $\{(e_i, 0), (0, f_j)\}$ où $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ désignent des bases respectives de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$, et de montrer que cette famille est elle-même libre et génératrice, c'est-à-dire une base de $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$.

2 Il est admis que $\mathbf{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la loi de composition appelée produit est interne. Pour obtenir une structure d'algèbre, il ne reste qu'à démontrer les deux axiomes suivants :

- Tout d'abord, cette multiplication interne doit être distributive par rapport à l'addition. Pour le montrer, notons $x = (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1)$, $y = (\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2)$ et $z = (\mathrm{P}_3, \mathrm{Q}_3)$ trois éléments de $\mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} x * (y + z) &= (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1) * (\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3, \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_3) \\ &= (\mathrm{P}_1 \cdot (\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3), \mathrm{P}_1 \cdot (\mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_3) + \mathrm{Q}_1 \cdot (\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3)) \end{aligned}$$

  On utilise alors la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition, d'où

$$\begin{aligned} x * (y + z) &= (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_3\, ,\, \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_3 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_3) \\ &= (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) + (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_3 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_3) \\ &= (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1) * (\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2) + (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1) * (\mathrm{P}_3, \mathrm{Q}_3) \\ x * (y + z) &= x * y + x * z \end{aligned}$$

  De même, on vérifie que $(x + y) * z = x * z + y * z$.

- Il ne reste qu'à montrer le dernier axiome :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda\,(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y \quad \text{et} \quad \lambda\,(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y)$$

  Pour cela soit λ un réel, $x = (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1)$ et $y = (\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2)$ désignant deux éléments de $\mathbf{C}$.

  Alors
$$\begin{aligned} \lambda\,(x \cdot y) &= \lambda\,(\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \\ &= (\lambda\,(\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2), \lambda\,(\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2)) \\ &= ((\lambda \mathrm{P}_1) \cdot \mathrm{P}_2, (\lambda \mathrm{P}_1) \cdot \mathrm{Q}_2 + (\lambda \mathrm{Q}_1) \cdot \mathrm{P}_2) \\ \lambda\,(x \cdot y) &= (\lambda x) \cdot y \end{aligned}$$

  On vérifie la deuxième égalité de façon analogue.

À ce stade, nous avons montré que $\mathbf{C}$ possède une structure d'algèbre.

- D'autre part, montrons que cette loi de composition est associative. En effet,

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1) * (\mathrm{P}_2 \cdot \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_2 \cdot \mathrm{Q}_3 + \mathrm{Q}_2 \cdot \mathrm{P}_3) \\ &= (\mathrm{P}_1 \cdot (\mathrm{P}_2 \cdot \mathrm{P}_3), \mathrm{P}_1 \cdot (\mathrm{P}_2 \cdot \mathrm{Q}_3 + \mathrm{Q}_2 \cdot \mathrm{P}_3) + \mathrm{Q}_1 \cdot (\mathrm{P}_2 \cdot \mathrm{P}_3)) \end{aligned}$$

  Or, la multiplication matricielle est une loi associative, d'où

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= ((\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \cdot \mathrm{P}_3, (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \cdot \mathrm{Q}_3 + (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \cdot \mathrm{P}_3) \\ &= (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) * (\mathrm{P}_3, \mathrm{Q}_3) \\ x * (y * z) &= (x * y) * z \end{aligned}$$

- Enfin, en notant $e = (\mathrm{I}_3, 0)$ où I_3 désigne l'élément neutre de $\mathbf{M}$, on vérifie facilement que

$$x * e = (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1) * (\mathrm{I}_3, 0) = (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1) = e * x = x$$

$$\boxed{\mathbf{C} \text{ est une } \mathbb{R}\text{-algèbre associative et unitaire.}}$$

3 Rappelons qu'un groupe est un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative, d'un élément neutre, et dont chaque élément est inversible pour cette loi. Montrons donc que $(\mathbf{G}, *)$ possède une structure de groupe :

- $\mathbf{G} \neq \varnothing$ car $e \in \mathbf{G}$.
- $*$ est une loi interne : si $x = (\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1)$ et $y = (\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2)$ sont deux éléments de $\mathbf{G}$, alors

$$x * y = (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2)$$

  Or, $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ est un sous-groupe de l'ensemble des matrices inversibles 3 par 3, donc le produit $\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2$ appartient à $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$. Il reste à vérifier la seconde condition d'appartenance à $\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} &{}^t(\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \cdot (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) + {}^t(\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \cdot (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \\ &\quad = {}^t\mathrm{P}_2 \cdot {}^t\mathrm{P}_1 \cdot (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) + ({}^t\mathrm{Q}_2 \cdot {}^t\mathrm{P}_1 + {}^t\mathrm{P}_2 \cdot {}^t\mathrm{Q}_1) \cdot (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \\ &\quad = {}^t\mathrm{P}_2 \cdot \underbrace{({}^t\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_1 + {}^t\mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_1)}_{=0} \cdot \mathrm{P}_2 + \underbrace{({}^t\mathrm{P}_2 \cdot \mathrm{Q}_2 + {}^t\mathrm{Q}_2 \cdot \mathrm{P}_2)}_{=0} \\ &{}^t(\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \cdot (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) + {}^t(\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{Q}_2 + \mathrm{Q}_1 \cdot \mathrm{P}_2) \cdot (\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_2) = 0 \end{aligned}$$

  où l'on a utilisé le fait que ${}^t\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_1 \cdot {}^t\mathrm{P}_1 = \mathrm{I}_3$.
- $*$ est une loi associative (voir la question 2).
- $*$ est une loi inversible puisque quel que soit $x = (\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ appartenant à $\mathbf{G}$, $y = {}^t(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ existe et est tel que :

  – $y \in \mathbf{G}$ car ${}^t\mathrm{P} \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ et $\underbrace{{}^t({}^t\mathrm{P})}_{=\mathrm{P}} \cdot {}^t\mathrm{Q} + \underbrace{{}^t({}^t\mathrm{Q})}_{=\mathrm{Q}} \cdot {}^t\mathrm{P} = 0$

  – $\begin{aligned} x * y &= (\mathrm{P} \cdot {}^t\mathrm{P}, \mathrm{P} \cdot {}^t\mathrm{Q} + \mathrm{Q} \cdot {}^t\mathrm{P}) \\ &= (\mathrm{I}_3, 0) \end{aligned}$

  soit $\quad x * y = e = y * x$

  x est donc inversible et $x^{-1} = {}^t(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

On en déduit donc que

$$\boxed{(\mathbf{G}, *) \text{ possède une structure de groupe.}}$$