Mines Maths 1 PC 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Nolin (ENS Ulm) ; il a été relu par Benoît Chevalier (ENS Ulm) et Jean Starynkévitch (ENS Cachan).

Ce sujet d'analyse propose d'étudier plusieurs fonctions définies à l'aide d'une série ou d'une intégrale. Il se décompose en deux parties, qui sont liées puisque la seconde utilise plusieurs résultats et définitions de la première.

Dans la première partie, la fonction Γ est introduite à l'aide d'une série de propriétés caractéristiques. On montre tout d'abord l'unicité d'une fonction vérifiant ces propriétés, puis on vérifie que la fonction Γ convient. La fin est consacrée au calcul de $\Gamma'(1)$ en fonction de la constante d'Euler γ.

Le but de la seconde partie, bien plus courte, est de calculer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x))\,\mathrm{d}x$$

en étudiant, à l'aide des techniques usuelles, une série de fonctions et une intégrale à paramètre. Dans la dernière question, on aboutit à une expression de I en fonction de π, de la constante γ et de la somme d'une série.

Ce problème ne comporte pas de difficultés majeures, mais il utilise toutes les techniques concernant l'étude de séries et d'intégrales dépendant d'un paramètre. Il permet donc de bien faire le point sur cette partie du cours.

Indications

Première partie

2 Pour calculer $\mathrm{F}(n)$, itérer la relation (**i**).

4 $\mathrm{F}(n+x)$ peut s'exprimer en fonction de $\mathrm{F}(x)$.

6 Se ramener au cas où $x \in \,]\,0\,;1\,]$ afin d'utiliser la question précédente.

10 On peut supposer $x \in \,]\,a\,;b\,[$, avec $0 < a < b$, pour obtenir une domination indépendante de x.

11 Pour montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, procéder à une intégration par parties. Pour prouver la convexité de $\ln \circ \Gamma$, utiliser la caractérisation par la dérivée seconde et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

12 Remarquer que $g_n(x) = \ln(u_n(x))$.

14 On a $g_n{}' = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k{}'$, et la convergence de cette série a été étudiée à la question précédente.

15 Chercher le lien avec $g_n{}'(1)$.

Seconde partie

17 Penser au critère des séries alternées et à l'inégalité qu'il fournit sur le reste. Quelle propriété possède alors φ ?

19 Pour la convergence uniforme de la série des dérivées, il faut utiliser, là aussi, le critère des séries alternées. On peut pour cela supposer $x \in \,]\,a\,;+\infty\,[$, avec $a > 0$, puis exploiter l'étude des variations de h_s.

20 Faire un changement de variable.

21 Partir du membre de droite de la relation et développer en série entière par rapport à la variable $\mathrm{X} = e^{-t}$ le dénominateur. L'interversion entre somme et intégrale doit alors être justifiée proprement, par exemple à l'aide du théorème de convergence dominée.

Première partie

Encadrement de F(n + x) et de F(x)

1 Pour obtenir la partie gauche de l'inégalité, on applique le résultat admis dans l'énoncé à la fonction $\ln \circ \mathrm{F}$ (qui est convexe sur $\mathrm{I} =]\,0\,;+\infty\,[$) et aux réels $x_1 = n-1$, $x_2 = n$ et $x_3 = n+x$:

$$\frac{\ln \mathrm{F}(n) - \ln \mathrm{F}(n-1)}{n-(n-1)} \leqslant \frac{\ln \mathrm{F}(n+x) - \ln \mathrm{F}(n)}{(n+x)-n}$$

soit
$$\boxed{\ln \mathrm{F}(n) - \ln \mathrm{F}(n-1) \leqslant \frac{\ln \mathrm{F}(n+x) - \ln \mathrm{F}(n)}{x}}$$

Pour la partie droite, on procède de même avec les réels $x_1 = n$, $x_2 = n+x$ et $x_3 = n+1$. En toute rigueur, il faut écarter ici le cas $x = 1$, pour lequel $x_2 = x_3$. On constate qu'il y a alors égalité. Si $x \neq 1$,

$$\frac{\ln \mathrm{F}(n+x) - \ln \mathrm{F}(n)}{(n+x)-n} \leqslant \frac{\ln \mathrm{F}(n+1) - \ln \mathrm{F}(n)}{(n+1)-n}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\frac{\ln \mathrm{F}(n+x) - \ln \mathrm{F}(n)}{x} \leqslant \ln \mathrm{F}(n+1) - \ln \mathrm{F}(n)}$$

2 On a $\mathrm{F}(1) = 1$ (**iii**). En utilisant la propriété (**i**), on obtient successivement $\mathrm{F}(2) = 1 \times \mathrm{F}(1) = 1$, puis $\mathrm{F}(3) = 2$, $\mathrm{F}(4) = 3 \times 2$, $\mathrm{F}(5) = 4 \times 3 \times 2$, etc. Ceci suggère de démontrer par récurrence que $\mathrm{F}(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (notons $\mathscr{P}(n)$ cette propriété).

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie d'après la propriété (**iii**).
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: si $\mathrm{F}(n) = (n-1)!$, alors d'après (**i**),
$$\mathrm{F}(n+1) = n \times \mathrm{F}(n) = n \times (n-1)! = n!$$
donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\boxed{\mathrm{F}(n) = (n-1)!}$$

Si l'on combine cette expression avec l'inégalité de la question précédente, il vient

$$\ln(n-1)! - \ln(n-2)! \leqslant \frac{\ln \mathrm{F}(n+x) - \ln(n-1)!}{x} \leqslant \ln n! - \ln(n-1)!$$

soit
$$\ln(n-1) \leqslant \frac{\ln \mathrm{F}(n+x) - \ln(n-1)!}{x} \leqslant \ln n$$

puis
$$x \ln(n-1) + \ln(n-1)! \leqslant \ln \mathrm{F}(n+x) \leqslant x \ln n + \ln(n-1)!$$

En prenant l'exponentielle de cette relation (ce qui préserve le sens des inégalités car exp est une fonction croissante), on obtient

$$\boxed{(n-1)^x (n-1)! \leqslant \mathrm{F}(n+x) \leqslant n^x (n-1)!}$$

3 Comme à la question précédente, une récurrence immédiate donne, en itérant la propriété (**i**),

$$\boxed{\mathrm{F}(p+x) = x(x+1)\cdots(x+p-1)\mathrm{F}(x)}$$

4 En remplaçant $\mathrm{F}(n+x)$ par son expression en fonction de $\mathrm{F}(x)$ dans l'inégalité de la question 2, il vient

$$(n-1)^x(n-1)! \leqslant x(x+1)\cdots(x+n-1)\mathrm{F}(x) \leqslant n^x(n-1)!$$

La partie droite de cette inégalité entraîne que

$$\mathrm{F}(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

d'où
$$\boxed{\frac{n}{x+n}\mathrm{F}(x) \leqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

La partie gauche de l'inégalité donne

$$\mathrm{F}(x) \geqslant \frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

Ceci étant vrai pour tout n, on peut remplacer n par $n+1$ pour obtenir

$$\boxed{\mathrm{F}(x) \geqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

Unicité de la fonction F

5 Comme $x \in \,]\,0\,;1\,]$, on peut appliquer les résultats donnés aux questions 1 à 4. D'après la question 4,

$$\frac{n}{x+n}\mathrm{F}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \mathrm{F}(x)$$

ce qui entraîne
$$\boxed{u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}(x)}$$

6 Il faut se ramener à la question précédente. Soit, pour $x > 0$, $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{N} < x \leqslant \mathrm{N}+1$. On a, en écrivant $x = (x-\mathrm{N})+\mathrm{N}$,

$$u_n(x) = \frac{n^{x-\mathrm{N}}n!}{(x-\mathrm{N})\cdots(x-\mathrm{N}+n)} \times \frac{n^{\mathrm{N}}(x-\mathrm{N})\cdots(x-\mathrm{N}+n)}{x\cdots(x+n)}$$

Or d'une part, d'après la question 5,

$$\frac{n^{x-\mathrm{N}}n!}{(x-\mathrm{N})\cdots(x-\mathrm{N}+n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}(x-\mathrm{N})$$

et d'autre part, pour $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$\frac{n^{\mathrm{N}}(x-\mathrm{N})\cdots(x-\mathrm{N}+n)}{x\cdots(x+n)} = (x-\mathrm{N})\cdots(x-1)\frac{n^{\mathrm{N}}}{(x-\mathrm{N}+n+1)\cdots(x+n)}$$

et
$$\frac{n^{\mathrm{N}}}{(x-\mathrm{N}+n+1)\cdots(x+n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{\mathrm{N}}}{n^{\mathrm{N}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

d'où
$$u_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x-\mathrm{N})\cdots(x-1)\mathrm{F}(x-\mathrm{N})$$