

## X Physique 2 MP 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) et Jean-David Picon (École Polytechnique).

---

Ce sujet étudie la formation de la banquise. Dans une première partie, on s'intéresse à la diffusion thermique et l'on établit les équations qui vont être utilisées dans la suite du problème. Pour la suite du problème, on se place en régime quasi-stationnaire. Dans une deuxième partie, on examine l'influence d'une couche de neige sur la formation de la banquise. Enfin, dans la troisième partie, la plus longue, on construit un modèle simple qui permet de rendre compte des variations de l'épaisseur moyenne de la banquise sur une année.

Ce problème est d'une longueur raisonnable et comporte peu de questions calculatoires. En outre, les résultats théoriques nécessaires à la poursuite du problème sont donnés. C'est un très bon sujet pour travailler la diffusion thermique et, plus généralement, pour comprendre les différentes étapes de la construction d'un modèle.

Soulignons qu'il y a de nombreuses applications numériques, essentielles si l'on veut pouvoir conclure à la dernière question ; ces applications numériques étant nombreuses et répétitives, le candidat sachant programmer sur sa calculatrice un même calcul sur plusieurs valeurs à la fois peut gagner un temps précieux. Rappelons enfin que les applications numériques sont en général des questions « payantes » et qu'il convient donc de s'entraîner régulièrement lors de sa préparation aux concours pour récolter ces points le moment venu.

## INDICATIONS

### Première partie

- I.1.e Une masse  $m$  de glace occupe plus d'espace que la même masse d'eau.
- I.2.b Prendre comme système la masse d'eau qui gèle entre  $t$  et  $t + dt$ . L'enthalpie de ce système varie uniquement à cause du changement d'état.

### Deuxième partie

- II.2 Calculer  $J_{Qz}$  dans la neige et dans la glace.
- II.3 L'équation différentielle obtenue est à variables séparables. Après intégration, on obtient une relation qui donne  $t$  en fonction de  $\xi^2$  et  $\xi$ . Pour inverser cette relation, il suffit de mettre les termes en  $\xi$  sous forme canonique, c'est-à-dire écrire  $\xi^2 + 2a\xi = (\xi + a)^2 - a^2$ .

### Troisième partie

- III Exprimer les températures en degrés Celsius permet d'éliminer des calculs la température  $T_F$ , ce qui simplifie grandement les écritures.
- III.1.b Écrire la conservation de l'énergie à l'interface entre l'air et la glace ; en d'autres termes, traduire l'égalité entre la variation d'énergie de la banquise calculée à la question précédente et le flux conducto-convectif.
- III.1.c Pour écrire le flux thermique  $J_Q(0^+)$ , utiliser la question III.1.a et le fait que  $T(t) = T_0$ .
- III.2.b Calculer d'abord  $\left. \frac{\partial T_G}{\partial z} \right|_h$  puis obtenir une équation différentielle à variables séparables et l'intégrer entre  $t_0$  et  $t > t_0$ .
- III.3.a On peut tout à fait définir une nouvelle origine des temps au début de la saison chaude. Utiliser alors l'équation différentielle obtenue à la question III.1.b en modifiant les variables, mais il ne faut pas reprendre la solution de cette équation car les conditions initiales sont différentes.
- III.4.a Le flux thermique  $J_Q(0^-)$  est constant et sert à faire fondre la glace.
- III.4.b Conduire un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir l'équation (1). Attention au fait que  $dh$  est négatif (la banquise fond).

## LA GLACE DANS LA NATURE

### I. LE PROBLÈME DE STEFAN

**I.1.a** La loi de Fourier dans la glace s'écrit, compte tenu des notations de l'énoncé,

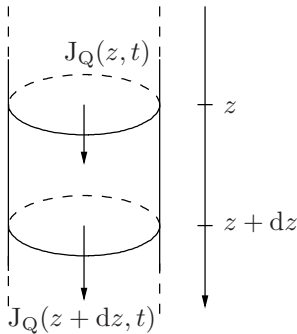
$$\vec{J}_Q(z, t) = -\lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial z} \vec{e}_z$$

où  $\vec{e}_z$  est le vecteur unitaire vertical descendant.

**I.1.b** Soit  $d\tau = S dz$  un volume élémentaire de glace de masse  $dm = \rho_G d\tau$ . Il constitue un système fermé et sa variation d'enthalpie pendant la durée  $dt$  est

$$dH = \rho_G c_G S dz (T_G(z, t + dt) - T_G(z, t))$$

soit, au premier ordre, 
$$dH = \rho_G c_G S \frac{\partial T_G}{\partial t} dt dz$$



En l'absence de travail autre que celui des forces de pression et de toute source d'énergie thermique au sein du volume  $d\tau$ , le premier principe de la thermodynamique s'écrit simplement

$$dH = S (J_Q(z, t) - J_Q(z + dz, t)) dt$$

$$dH = -\frac{\partial J_Q}{\partial z} S dz dt$$

On traduit maintenant l'égalité des deux expressions de  $dH$ , en tenant compte de la loi de Fourier,

$$\rho_G c_G \frac{\partial T_G}{\partial t} S dt dz = \lambda_G \frac{\partial^2 T_G}{\partial z^2} S dt dz$$

Par conséquent

$$\frac{\partial T_G}{\partial t} = \frac{\lambda_G}{\rho_G c_G} \frac{\partial^2 T_G}{\partial z^2}$$

**I.1.c** Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} T_G(\xi(t), t) = T_F \\ T_G(0, t) = T_S \end{cases}$$

Ces conditions sont insuffisantes pour déterminer  $T_G(z, t)$  car on ne dispose pas de l'état « initial » et l'on n'a aucune information sur la dépendance temporelle de  $\xi$ .

C'est le changement d'état (solidification) qui impose que la température à la frontière  $z = \xi$  soit constante, égale à  $T_F$ .

**I.1.d** Il y a coexistence des deux phases liquide et solide. L'eau, qui est à la température de changement d'état, se maintient à cette température.

Il ne faut jamais oublier que lorsque l'on a équilibre et coexistence de deux phases, alors la température au voisinage de l'interface est toujours la température de changement d'état.

On peut s'étonner de ce résultat car la solidification est une transformation qui libère de l'énergie. En fait, l'énergie libérée compense les pertes thermiques par diffusion vers l'atmosphère, plus froide.

Sous une pression donnée, il est possible de trouver de l'eau liquide à une température inférieure à la température de solidification. Dans ce cas, l'eau est dans un état métastable (eau surfondue, c'est le cas dans les pluies verglaçantes par exemple) puisque l'état thermodynamiquement stable est l'eau solide. On suppose donc, dans tout le problème, que l'on est sous contrôle thermodynamique.

**I.1.e** La glace est moins dense que l'eau : à masse égale, la glace est plus volumineuse que l'eau. En progressant, le front de solidification entraîne la mise en mouvement de l'eau.

**I.2.a** Soit  $S$  une section donnée. Entre  $t$  et  $t + dt$ , une masse  $dm_G$  gèle, où  $dm_G$  est donnée par

$$dm_G = \rho_G S \dot{\xi} dt$$

**I.2.b** Calculons la variation d'enthalpie de cette masse  $dm_G$  en négligeant la variation d'énergie cinétique. Cette variation s'écrit simplement

$$dH = dm_G (H_G - H_E)$$

$$dH = -dm_G L$$

**I.2.c** Entre  $t$  et  $t + dt$ , ce système (fermé) reçoit un transfert thermique  $S J_Q(\xi) dt$ , de sorte que l'on peut écrire

$$-dm_G L = S J_Q(\xi) dt$$

ce qui conduit bien à

$$\lambda_G \left. \frac{\partial T_G}{\partial z} \right|_{\xi} = \rho_G L \dot{\xi}(t) \quad (1)$$

**I.3.a** Dans ce modèle, l'eau et la glace forment un système fermé qui perd, par diffusion thermique, de l'énergie par sa surface en contact avec l'atmosphère. Comme il n'y a aucune autre source d'énergie à l'intérieur de ce système, ni aucun autre échange avec l'extérieur, son énergie ne peut que diminuer : un état stationnaire est donc impossible.

En effet, un état stationnaire impliquerait un transfert thermique  $J$  constant (éventuellement nul). Comme la température de surface  $T_S$  et la température de l'interface  $T_F$  ont des valeurs fixées, ce flux thermique ne saurait être nul. Dans ce cas, pour conserver  $J$  il faudrait que l'épaisseur de banquise soit constante, ce qui est impossible si  $J$  est non nul (en effet,  $J$  est responsable du changement d'état au niveau de l'interface : l'épaisseur de la banquise varie nécessairement).