Centrale Maths 1 MP 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Gadat (Enseignant-chercheur à l'Université) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) et Thomas Chomette (Professeur en CPGE).

Cette épreuve propose d'étudier des solutions g de l'équation différentielle

$$g' - g + f = 0 \qquad \mathrm{E}_f$$

où la fonction f est donnée. Les deux premières parties concernent l'étude de cas particuliers lorsque la fonction f est connue explicitement, et les parties suivantes étudient des solutions lorsque f appartient à des espaces vectoriels particuliers.

- En fin de première partie, on introduit une suite de fonctions, qui sera vue dans la suite de l'énoncé comme un cas particulier.
- La deuxième partie aboutit à la vérification de propriétés géométriques des solutions.
- La troisième partie élargit le sujet : f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant une fonction puissance lorsque x tend vers l'infini.
- Dans les dernières parties, on traite le cas des fonctions bornées, périodiques puis polynomiales.

La difficulté de ce problème est progressive et les questions s'enchaînent assez bien. Notons tout de même que les questions III.C, IV.D et V.E sont assez délicates. Enfin, une question relativement classique et délicate apparaît en fin d'énoncé sur les suites de fonctions polynomiales de degré constant. Il est donc intéressant de prêter une attention particulière à la résolution de cette question.

Indications

Partie I

I.B L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est un espace affine.

I.C.1 Calculer l'image par Φ des fonctions cos et sin.

I.C.2 Déterminer la boule unité de Π, puis démontrer que la norme de l'application Φ vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire la limite de la suite de fonctions.

Partie II

II.A S'inspirer de la formule intégrale donnée en I.A.

II.B.1 Remarquer que Y_m est solution de E_f.

II.B.3 Utiliser les propriétés géométriques trouvées dans la question précédente pour tracer convenablement les courbes $\mathcal{C}_\lambda$.

Partie III

III.B Décrire toutes les solutions de E_f pour conclure.

III.C Commencer par démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie. Expliquer ensuite pourquoi la dérivée de la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle.

III.D Faire un raisonnement par récurrence en utilisant l'équation différentielle vérifiée par f_1.

III.E Pour montrer la surjectivité de Φ, trouver un antécédent à tout élément de $\mathscr{C}^1$.

Partie IV

IV.C Revenir à la définition de la limite pour démontrer que $\mathcal{L}_0$ est stable par Φ.

IV.D Utiliser le résultat de la question III.D pour démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la limite de f en $+\infty$.

Partie V

V.B Exprimer les coefficients de Fourier de ${f_1}'$ en fonction de ceux de f_1 et utiliser E_f.

V.C Utiliser l'expression des coefficients de Fourier des fonctions $g_n = f_n - c_0(f)$ et majorer la norme infinie de chaque fonction g_n.

V.E Démontrer que Φ est continue pour N_1 et N_2. Chercher un contre-exemple pour Φ^{-1}.

Partie VI

VI.B Utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.

VI.C Faire un raisonnement par récurrence pour démontrer la stabilité de $\mathcal{FP}_d$ par Φ.

VI.E Démontrer que la suite des coefficients $(a_{d-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

I. Étude d'un premier exemple

I.A Remarquons tout d'abord que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |e^{-t}\cos t| \leqslant e^{-t} \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad |e^{-t}\sin t| \leqslant e^{-t}$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que les fonctions $t \mapsto e^{-t}\cos t$ et $t \mapsto e^{-t}\sin t$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que

$$\boxed{\text{Les deux intégrales convergent sur tout intervalle } [\,x\,; +\infty\,[.}$$

Pour calculer explicitement les deux fonctions

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$$

on calcule la valeur de la fonction $\mathrm{F} + i\mathrm{G}$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) + i\mathrm{G}(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{(i-1)t}\,\mathrm{d}t$$

On trouve alors $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) + i\mathrm{G}(x) = e^{ix}\,\dfrac{1+i}{2}$

ce qui permet de conclure que les expressions proposées valent

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}(x) = \frac{\cos x + \sin x}{2}} \qquad (\mathbf{1})$$

I.B En dérivant la fonction F précédente, on trouve que $\mathrm{F}' = -\mathrm{G}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(x) = \cos x$$

Par conséquent, F est une solution de l'équation différentielle proposée. De plus, on remarque que F est bornée, car

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\mathrm{F}(x)| = \left|\frac{\cos x - \sin x}{2}\right| \leqslant 1$$

On peut donc prendre comme solution de l'équation différentielle $y' - y + \cos x = 0$ la fonction Y_0, bornée, suivante :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Y}_0(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\cos x - \sin x}{2}}$$

Les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les $x \mapsto \lambda e^x$, avec λ réel. Pour respecter les notations de l'énoncé, il suffit alors de poser

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = e^x$$

pour conclure que la solution générale sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle est de la forme

$$\boxed{x \longmapsto \lambda e^x + \mathrm{Y}_0(x)}$$

De manière tout à fait similaire, on démontre que les solutions de l'équation différentielle $y' - y + \sin x = 0$ sont de la forme

$$\boxed{x \longmapsto \lambda e^x + \frac{\cos x + \sin x}{2}}$$

I.C.1 L'application Φ est bien définie sur Π, plan vectoriel engendré par les fonctions cos et sin, car si f s'écrit comme une combinaison linéaire de ces deux fonctions, $f = \alpha \cos + \beta \sin$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f(x)| \leqslant |\alpha \cos x + \beta \sin x|\, e^{-x} \leqslant (|\alpha| + |\beta|)e^{-x}$$

et la fonction $x \mapsto (|\alpha| + |\beta|)e^{-x}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

La linéarité de l'application Φ étant considérée comme évidente, il reste à démontrer que Π est stable par Φ. Par linéarité de Φ, il suffit de vérifier que l'image d'une base de Π appartient à Π, ce qui découle en réalité de (**1**) :

$$\Phi(\cos) = \frac{\cos}{2} - \frac{\sin}{2} \qquad \text{et} \qquad \Phi(\sin) = \frac{\cos}{2} + \frac{\sin}{2}$$

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est linéaire de } \Pi \text{ dans } \Pi.}$$

En outre, la matrice de Φ dans la base $(\cos, \sin)$ du plan Π est

$$\boxed{\mathrm{M}(\Phi)_{(\cos,\ \sin)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

> Remarquons que la matrice $\mathrm{M}(\Phi)_{(\cos,\ \sin)}$ est inversible, ce qui assure que la restriction de l'application Φ à Π est elle-même inversible.

I.C.2 L'application Φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel Π muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Donnons-nous une fonction réelle f dans Π, elle s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$$

Si l'on note ϕ l'angle de $[\,0\,;2\pi\,[$ vérifiant

$$\cos\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

on a $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(x-\phi)$$

On en conclut que $$\|f\|_\infty = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

En outre, $$\Phi(f) = \alpha\Phi(\cos) + \beta\Phi(\sin) = \frac{\alpha+\beta}{2}\cos + \frac{\alpha-\beta}{2}\sin$$

et par conséquent, $$\|\Phi(f)\|_\infty = \sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}$$

soit encore $$\|\Phi(f)\|_\infty = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\|f\|_\infty$$

La norme subordonnée de Φ vaut donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et le meilleur choix pour k demeure

$$\boxed{\|\Phi\| = k = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$