Mines Informatique MP 2003 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Samuel Mimram (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-Baptiste Rouquier (ENS Lyon) et Vincent Puyhaubert (ENS Cachan).

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Le premier problème traite de la logique booléenne et d'une extension tri-valuée de cette logique. Il est relativement facile et ne requiert que des connaissances de première année : il est principalement fondé sur l'utilisation de tables de vérité et sur la notion d'équivalence entre propositions (deux propositions sont équivalentes si elles ont la même table de vérité).

Le second problème aborde plusieurs aspects de la *coloration des graphes*, qui est un problème classique d'algorithmique. Il comporte un certain nombre de questions de programmation et des questions théoriques visant à faire manipuler les graphes. En plus de la définition d'un graphe, les notions de *nombre chromatique* (le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier un graphe) et de *polynôme chromatique* d'un graphe sont introduites. Un algorithme naïf de coloration est proposé ainsi que des transformations sur les graphes, qui permettent de trouver des algorithmes calculant le polynôme et le nombre chromatique d'un graphe quelconque.

Ce sujet permet de réviser la logique booléene et constitue un bon exercice d'algorithmique permettant de voir (ou de revoir) et d'utiliser des fonctions avancées de Caml Light.

Indications

1. Logique propositionnelle tri-valuée

1 Utiliser l'identité : $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$.

5 Formuler le raisonnement par contraposition en termes de propositions logiques.

6 Raisonner sur les tables de vérité et montrer que le problème se ramène à ne trouver les valeurs que de quelques cases de la table de vérité du connecteur $\wedge$.

2. Coloration d'un graphe

9 Parcourir pour tout sommet s la liste des arêtes. Pour toute arête de la forme (s, b) rajouter l'élément b dans une liste initialement vide.

10 Remarquer que deux sommets de même parité ne sont pas voisins pour trouver une meilleure coloration que celle donnée par l'algorithme.

11 Colorier au fur et à mesure les sommets, de 0 jusqu'à $n-1$. À chaque étape, calculer dans une variable auxiliaire la liste triée des couleurs déja utilisées par les voisins du sommet à colorier.

12 Montrer que EC(G) est non vide, puis que :

$$\forall p \in \mathrm{EC(G)} \quad \forall q \in \mathbb{N} \qquad q \geqslant p \Longrightarrow q \in \mathrm{EC(G)}$$

14 Montrer qu'une coloration du graphe est bonne si et seulement si les couleurs des sommets sont deux à deux distinctes.

15 Considérer le triangle formé par les sommets 0, 3 et 4, puis le sommet 1, puis le sommet 2.

17 prem_ni(G) est le minimum des sommets qui sont extrémité d'une arête.

18 Écrire une fonction qui, à une liste d'arêtes l et deux sommets s_1 et s_2, enlève toutes les arêtes de l reliant les sommets s_1 et s_2.

19 Utiliser la fonction `map` de Caml pour renommer les sommets de la liste d'arêtes de H(G).

20 Montrer que deux sommets voisins dans H(G) le sont aussi dans G.

21 Montrer que les colorations c de $\mathrm{BC(H(G)}, p) \smallsetminus \mathrm{BC(G}, p)$ sont les bonnes colorations de H(G) vérifiant $c(s_1) = c(s_2)$.

22 Utiliser les deux questions précédentes.

24 Raisonner par récurrence sur le nombre d'arêtes des graphes.

25 Raisonner de même qu'à la question 24.

27 S'inspirer de l'algorithme de la question 23.

28 Utiliser la relation de récurrence $x^{i+1} = x^i \times x$ (avec $x^0 = 1$).

29 Écrire un programme qui trouve le plus petit entier i tel que $\mathrm{Pc(G)}(i) \neq 0$.

1. Logique propositionnelle tri-valuée

1 On sait d'après les lois de De Morgan que $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$ et que $\neg\neg x \equiv x$ (on note $\equiv$ l'équivalence entre propositions). On en déduit :

$$\neg(\neg x \wedge \neg y) \equiv (\neg\neg x) \vee (\neg\neg y) \equiv x \vee y$$

$$\boxed{\text{La proposition } \mathrm{P}_1 = \neg(\neg x \wedge \neg y) \text{ convient.}}$$

Montrons que les propositions « $\neg(\neg x \wedge \neg y)$ » et « $x \vee y$ » sont équivalentes dans $\mathscr{L}_3$.

On constate sur les tables de vérité que $\mathscr{L}_3$ est une extension de $\mathscr{L}_2$ (les restrictions des tables de vérité de $\mathscr{L}_3$ aux valeurs V et F donnent les tables de vérité de $\mathscr{L}_2$). En outre, le connecteur $\wedge$ est commutatif dans $\mathscr{L}_3$ car sa table de vérité est symétrique. Pour montrer que les propositions « $\neg(\neg x \wedge \neg y)$ » et « $x \vee y$ » sont équivalentes, il suffit donc de montrer qu'elles ont les mêmes valeurs pour $(x, y) \in \{(\mathrm{V}, \mathrm{I}); (\mathrm{F}, \mathrm{I}); (\mathrm{I}, \mathrm{I})\}$. Et en effet, on a bien :

$$\begin{aligned}
\neg(\neg \mathrm{V} \wedge \neg \mathrm{I}) &= \neg(\mathrm{F} \wedge \mathrm{I}) = \neg \mathrm{F} = \mathrm{V} = \mathrm{V} \vee \mathrm{I} \\
\neg(\neg \mathrm{F} \wedge \neg \mathrm{I}) &= \neg(\mathrm{V} \wedge \mathrm{I}) = \neg \mathrm{I} = \mathrm{I} = \mathrm{F} \vee \mathrm{I} \\
\neg(\neg \mathrm{I} \wedge \neg \mathrm{I}) &= \neg(\mathrm{I} \wedge \mathrm{I}) = \neg \mathrm{I} = \mathrm{I} = \mathrm{I} \vee \mathrm{I}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les propositions « } x \vee y \text{ » et } \mathrm{P}_1 = \neg(\neg x \wedge \neg y) \text{ sont équivalentes dans } \mathscr{L}_3.}$$

> On pouvait aussi se contenter de calculer entièrement la table de vérité de « $\neg(\neg x \wedge \neg y)$ » dans $\mathscr{L}_3$ et constater qu'elle est identique à celle de « $x \vee y$ ». Cependant, il vaut souvent mieux – surtout dans une épreuve de trois heures – s'arrêter pour réfléchir quelques minutes que se lancer dans des calculs longs, fastidieux et sources d'erreurs.

2 En comparant les tables de vérité, on vérifie aisément qu'en logique propositionnelle classique, on a : $x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$.

$$\boxed{\text{La proposition } \mathrm{P}_2 = \neg x \vee y \text{ convient.}}$$

Dans la logique $\mathscr{L}_3$, avec $x = y = \mathrm{I}$, on a :

$$(\neg \mathrm{I} \vee \mathrm{I}) \;=\; \mathrm{I} \;\neq\; \mathrm{V} \;=\; (\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I})$$

$$\boxed{\text{Ces propositions ne sont plus équivalentes dans } \mathscr{L}_3.}$$

3 Notons P la proposition « $x \Rightarrow y$ » et Q la propostition « $(\neg x) \Rightarrow y$ ». La proposition P_3 = « $((x \Rightarrow y) \wedge ((\neg x) \Rightarrow y)) \Rightarrow y$ » s'écrit alors « $(P \wedge Q) \Rightarrow y$ ». Calculons sa table de vérité dans $\mathscr{L}_3$:

x	y	P	Q	$(P \wedge Q)$	P_3
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V
V	I	I	V	I	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	I	V	I	I	V
I	V	V	V	V	V
I	F	I	I	I	I
I	I	V	V	V	I

Cette proposition n'est pas une tautologie dans la logique $\mathscr{L}_3$ car il existe des valuations de x et y pour lesquelles elle ne s'évalue pas à « vrai ».

4 Établissons une forme normale disjonctive de la proposition « $(x \vee y) \Rightarrow z$ » dans $\mathscr{L}_2$. D'après les questions 1 et 2, on a :

$$\begin{aligned}(x \vee y) \Rightarrow z &\equiv \neg(\neg x \wedge \neg y) \Rightarrow z\\ &\equiv \neg\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee z\\ (x \vee y) \Rightarrow z &\equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee z\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La proposition } P_4 = \text{« } (\neg x \wedge \neg y) \vee z \text{ » convient.}}$$

Les propositions P_4 et « $(x \vee y) \Rightarrow z$ » ne sont pas équivalentes dans $\mathscr{L}_3$ car on a par exemple, avec $x = F$, $y = I$ et $z = I$:

$$((\neg F \wedge \neg I) \vee I) \;=\; ((V \wedge I) \vee I) \;=\; (I \vee I) \;=\; I$$

et
$$((F \vee I) \Rightarrow I) \;=\; (I \Rightarrow I) \;=\; V$$

5 La justification de la validité du raisonnement par contraposition en logique classique est l'équivalence des propositions « $\neg y \Rightarrow \neg x$ » et « $x \Rightarrow y$ ». Si l'on construit la table de vérité dans $\mathscr{L}_3$ de la proposition « $\neg y \Rightarrow \neg x$ », on constate qu'elle est identique à celle de l'implication. Le raisonnement par contraposition est donc encore valide dans $\mathscr{L}_3$.

6 Déterminons le nombre de logiques $\mathscr{L}$ possibles vérifiant :

1. $\mathscr{L}$ est une extension de $\mathscr{L}_2$ pour $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$;
2. $\wedge$ est commutatif ;
3. $x \vee y \equiv P_1$;
4. $x \Rightarrow y \equiv P_2$;
5. pour toute valeur de y, la fonction $x \mapsto x \wedge y$ croît au sens large ;
6. $\neg(\neg x) \equiv x$.

> Il n'y a pas unicité des propositions P_1 et P_2, solutions des questions 1 et 2 (la proposition P_2 = « $\neg x \vee \neg\neg y$ » convenait aussi, par exemple). Cependant, la démonstration qui suit est indépendante des propositions choisies.