ENAC Mathématiques toutes filières 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Xavier Goaoc (ENS Cachan) ; il a été relu par Sébastien Gadat (ENS Cachan) et Éric Ricard (agrégé de mathématiques).

Cette épreuve est composée de trois parties indépendantes. Les deux premières traitent de polynômes, l'une du point de vue de l'analyse et l'autre sous l'angle de l'algèbre linéaire. La troisième partie, quant à elle, étudie une suite définie par des intégrales. D'une manière générale, les questions sont assez mal posées, probablement pour juger du sens critique des candidats.

- La première partie, la plus longue, porte sur les polynômes de Tchebychev. Il s'agit de passer en revue diverses propriétés de ces polynômes, puis de les expliciter. On utilise au passage un peu d'arithmétique et quelques propriétés des solutions polynomiales d'une équation différentielle.
- La seconde partie s'intéresse à l'application linéaire
$$f\colon \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E} \\ \mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{X} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)) \end{cases}$$
où E est l'espace des polynômes à une indéterminée. On se limite essentiellement à l'étude de la restriction de f à un sous-espace de dimension finie. On y manipule l'écriture matricielle de f dans différentes bases.
- La dernière partie étudie les classiques intégrales de Wallis, c'est-à-dire la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$$
Cette partie fait intervenir quelques outils classiques d'analyse ainsi que des raisonnements par récurrence.

Indications

Partie I

1 Multiplier $\mathrm{P}\left(\dfrac{p}{q}\right)$ par q^n.

2 Utiliser la question 1 et le théorème des valeurs intermédiaires.

3 Exprimer P_n en se servant de la formule de Moivre.

6 Utiliser la formule obtenue à la question 3 ainsi que la question 5.

7 Chercher les racines qui se trouvent dans $[-1,1]$ et conclure en utilisant le degré de P_n.

11 Appliquer le résultat de la question 9. Remarquer qu'une relation entre polynômes vraie sur $[-1,1]$ est vraie sur tout $\mathbb{R}$.

12 Pour décider des réponses C et D, utiliser le fait que deux suites coïncident si et seulement si elles ont même terme initial et suivent la même relation de récurrence.

13 Montrer que P_n satisfait aux hypothèses du polynôme Q_n de la question 12 (pour cela, on peut étudier sa parité) puis en utiliser le résultat.

14 Appliquer le théorème de Bézout.

15 Utiliser le résultat de la question 14.

Partie II

17 S'intéresser au degré de l'image d'un polynôme par f.

21 On peut utiliser le théorème du rang.

22 Montrer que les A_i sont définis de manière unique et vérifier les expressions proposées par l'énoncé pour A_2 et A_3.

24 Utiliser la propriété qui définit les $(\mathrm{A}_i)_{i=0,\,\ldots,3}$.

Partie III

26 Étudier le signe de $\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n-1}$.

27 Penser à une intégration par parties.

30 Pour montrer la convergence, prouver que la suite (I_n) est minorée.

Partie I

Dans les problèmes I et II, nous identifions implicitement un polynôme et la fonction polynomiale associée.

1 Considérons un polynôme P à coefficients entiers admettant $\dfrac{p}{q}$ comme racine, avec p et q premiers entre eux. On a alors

$$q^n \mathrm{P}\left(\frac{p}{q}\right) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_0 q^n = 0$$

soit
$$p(a_n p^{n-1} + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Donc p divise $a_0 q^n$. Comme p est premier avec q, il l'est aussi avec q^n. En appliquant le théorème de Gauss, on en déduit que p divise a_0. De même,

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$$

Et un raisonnement identique permet de conclure que q divise a_n.

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ■

La réponse C a été écartée en raison de sa justification insuffisante.

2 Si f admet une racine rationnelle $\dfrac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux, alors, en appliquant le résultat de la question 1, p divise -1 et q divise 1. Par conséquent, les seuls rationnels qui peuvent être racines de f sont 1 et -1. Calculons les valeurs que prend f en ces deux points :

$$f(1) = -1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = 1$$

Il s'ensuit que la réponse B est fausse, puisque f n'admet aucune racine rationnelle.

D'autre part, un polynôme P de degré impair a toujours au moins une racine réelle. En effet,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{P}(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{P}(x) = -\infty$$

Il existe donc deux réels a et b tels que $\mathrm{P}(a) > 0$ et $\mathrm{P}(b) < 0$. Comme une fonction polynôme est continue, il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour obtenir l'existence d'une racine réelle entre a et b. La réponse C est donc incorrecte.

Pour déterminer si la réponse D est vraie, examinons le signe de f aux bornes de l'intervalle proposé :

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0 \qquad \text{et} \qquad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$$

Le signe de f étant le même aux extrémités de l'intervalle, f s'y annule un nombre pair de fois, si l'on compte les racines avec leurs multiplicités. Si f a deux racines complexes conjuguées et une racine réelle, cette dernière est de multiplicité 1 (car f est de degré 3). Il en résulte que la réponse D est elle aussi fausse.

A ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E ■

> On peut d'emblée écarter la réponse A puisque le nombre de racines réelles d'un polynôme n'est pas caractérisé par le nombre de racines de sa dérivée (considérer les polynômes X^2, X^2+1 et X^2-1 par exemple).

3 Fixons $n \in \mathbb{N}$ et exprimons P_n au moyen de la formule de Moivre.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad (\cos t + i\sin t)^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

Or
$$(\cos t + i\sin t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \sin^k t \cos^{n-k} t$$

Donc
$$\cos nt = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k} (-1)^k \sin^{2k} t \cos^{n-2k} t$$

ou encore
$$\cos nt = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_n^{2k} (-1)^k (1-\cos^2 t)^k \cos^{n-2k} t$$

Donc $\boxed{P_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ à coefficients entiers relatifs.}}$

La fonction cos est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$. Par conséquent, si un polynôme Q vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad Q(\cos t) = \cos nt$$

alors Q coïncide avec P_n sur l'intervalle $[-1,1]$, ce qui implique que $Q = P_n$. Donc, pour tout n, P_n est défini de manière unique.

☐ A ☐ B ■ C ■ D ☐ E

> Les propositions A et B peuvent être rapidement écartées en observant que $P_0(X) = 1$ et $P_1(X) = X$.

4 Par définition de P_n, on a

$$\boxed{P_0(X) = 1 \qquad \text{et} \qquad P_1(X) = X}$$

☐ A ☐ B ☐ C ■ D ☐ E

5 Pour commencer, remarquons que les réponses A et B sont fausses. Pour s'en convaincre il suffit de prendre $a = 0$ et $b = 0$. La formule correcte, proche de celles proposées, est

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Utilisons-la pour exprimer la relation de récurrence entre les P_n. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$; on a

$$2\cos t \cos nt = \cos(n+1)t + \cos(n-1)t$$

Il s'ensuit que