Centrale Maths 1 PSI 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Gadat (ENS Cachan) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (ENS Cachan) et Thomas Chomette (ENS Ulm).

Ce sujet traite à la fois d'analyse classique sur les séries de Fourier et d'algèbre linéaire des endomorphismes auto-adjoints. C'est donc l'occasion pour le candidat de prouver sa capacité à manier différents types de raisonnements dans un problème.

Les questions du sujet sont d'une difficulté relativement égale et leur progression vers le but recherché est agréablement équilibrée. La plupart des questions sont accessibles à l'élève connaissant sur le bout des doigts les théorèmes importants de son cours d'analyse et d'algèbre linéaire. Néanmoins, la longueur de l'énoncé ne permet pas de traiter l'intégralité du sujet dans le temps imparti, comme souvent aux épreuves de concours.

L'énoncé définit tout d'abord ce qu'est une trajectoire admissible et le but du problème est de démontrer une majoration de la vitesse en moyenne quadratique pour ces trajectoires.

- Le sujet débute par une partie préliminaire où l'on redémontre très précisément certains points du cours sur les projections orthogonales.
- La première partie utilise les théorèmes généraux sur les séries de Fourier pour démontrer des convergences ponctuelles ou au sens L^2 de séries de fonctions. Elle introduit une quantité servant à obtenir la majoration recherchée.
- La seconde partie interprète alors tous les résultats de convergence en norme L^2 obtenus dans la première partie en termes de projections orthogonales sur des hyperplans. On manipule également dans cette partie des opérateurs et des endomorphismes auto-adjoints, permettant d'aboutir à la majoration finale :

$$\forall \xi \in \mathcal{A} \qquad \langle \xi' | \xi' \rangle \leqslant \frac{1}{\mu^2} \langle \xi'' | \xi'' \rangle$$

Indications

Partie I

I.B.1 Faire un dessin du graphe de f.

I.B.2 Utiliser les symétries de la question I.B.1 pour éviter des calculs inutiles.

I.B.3 Énoncer précisément les théorèmes et hypothèses du cours utilisés.

I.B.4 Attention aux hypothèses pour l'application de ce théorème.

I.B.5 Utiliser la question I.B.4.

I.B.6 Utiliser la question I.B.5.

I.C.1 Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires en étudiant le comportement de ϕ_n aux bornes de ses intervalles de définition.

I.C.3 Majorer indépendamment de ω le terme : $\dfrac{\omega^2}{{\omega_k}^2(\omega^2 - {\omega_k}^2)}$.

Partie II

II.A.1 Intégrer par parties.

II.A.2 Penser au théorème de Fubini.

II.B.1 Raisonner par double inclusion. Que représente $\mathscr{H}_n$ géométriquement ?

II.B.2 Utiliser la question II.B.1.

II.B.4 Démontrer et utiliser le fait que $\langle z|\mathrm{T}_n(z)\rangle = \langle z|\mathrm{T}(z)\rangle$.

II.C.1 Se servir des questions I.B.3 et II.A.3.

II.D Appliquer les résultats précédents à ξ'' qui est dans $\mathscr{H}$.

Résultats préliminaires

A

> L'énoncé débute par des questions de cours et le correcteur attend de l'élève qu'il énonce très précisément les théorèmes du cours, quitte à utiliser un style un peu trop formel. On exige par ailleurs la démonstration du résultat du cours : $\left(\text{Vect}\,(h)^{\perp}\right)^{\perp} = \text{Vect}\ h$ et même si une démonstration correcte ne rapporte guère de points, il y a fort à parier qu'une démonstration incorrecte en fait perdre beaucoup...

Voici l'énoncé précis du théorème qui permet de conclure directement.

Si F est un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace vectoriel E préhilbertien, alors $\text{F}^{\perp}$ est un supplémentaire orthogonal de F :

$$\text{F} \oplus \text{F}^{\perp} = \text{E}$$

De plus $$\text{codim}\left(\text{F}^{\perp}\right) = \dim \text{F} \qquad \text{et} \qquad \left(\text{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \text{F}$$

Vérifions tout d'abord que le cadre particulier de l'énoncé rentre bien dans les hypothèses du théorème. $\mathcal{C}$ est bien un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire $\langle | \rangle$. L'espace vectoriel engendré par h est de dimension finie. On obtient donc, en prenant pour F l'espace engendré par h :

$$\boxed{\mathcal{C} = \text{Vect}\ h \oplus (\text{Vect}\ h)^{\perp}} \qquad (\mathbf{1})$$

Démontrons, comme le demande l'énoncé, le théorème précédent dans le cas particulier où $\text{F} = \text{Vect}\,(h)$.

Tout d'abord, les espaces $\text{Vect}\,(h)$ et $\text{Vect}\,(h)^{\perp}$ sont bien d'intersection réduite à 0_{E} car si x est un élément commun à ces deux espaces, on trouve :

$$\langle x | x \rangle = \|x\|_2{}^2 = 0$$

c'est-à-dire $$x = 0$$

Donc $$\boxed{\text{Vect}\,(h) \cap \text{Vect}\,(h)^{\perp} = 0_{\text{E}}}$$

Ensuite, démontrons que la somme de tout x de E se décompose en la somme d'un élément de $\text{Vect}\,(h)$ et d'un élément de $\text{Vect}\,(h)^{\perp}$.

Notons Π_h^1 l'application définie par $\Pi_h^1(f) = f - \dfrac{\langle f | h \rangle}{\|h\|_2{}^2} h$. On peut écrire

$$\forall f \in \text{E} \qquad f = \left(f - \Pi_h^1(f)\right) + \Pi_h^1(f)$$

Le terme $f - \Pi_h^1(f)$ appartient à $\text{Vect}\,(h)$ et $\Pi_h^1(f)$ est orthogonal par construction à h, c'est-à-dire que $\Pi_h^1(f)$ appartient à $\text{Vect}\,(h)^{\perp}$. On en conclut donc le premier résultat annoncé :

$$\boxed{\mathcal{C} = \text{Vect}\ h \oplus (\text{Vect}\ h)^{\perp}}$$

Prouvons que $$\left(\text{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \text{F}$$

Effectuons un raisonnement par double inclusion. Donnons-nous un x dans F, alors pour tout h de $\mathrm{F}^{\perp}$, on a $\langle x|h\rangle = 0$. Ainsi x est dans $\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$ et on a $\mathrm{F} \subset \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$.

Réciproquement, prenons y dans $\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$, alors y se décompose dans la somme directe de $\mathcal{C}$ et :

$$\exists y_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F} \quad \exists y_{\mathrm{F}^{\perp}} \in \mathrm{F}^{\perp} \qquad y = y_{\mathrm{F}} + y_{\mathrm{F}^{\perp}}$$

Démontrons que $\|y_{\mathrm{F}^{\perp}}\|_2 = 0$.

On obtient $$\langle y|y_{\mathrm{F}^{\perp}}\rangle = \langle y_{\mathrm{F}}|y_{\mathrm{F}^{\perp}}\rangle + \|y_{\mathrm{F}^{\perp}}\|_2{}^2$$

On sait que y est dans $\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$, on en conclut que $\langle y|y_{\mathrm{F}^{\perp}}\rangle = 0$. On a de même

$$\langle y_{\mathrm{F}}|y_{\mathrm{F}^{\perp}}\rangle = 0$$

En conclusion, on a $\|y_{\mathrm{F}^{\perp}}\|_2 = 0$ et y est dans F ; ce qui achève la démonstration.

$$\boxed{\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{F}}$$

> Il est bon de connaître un contre-exemple classique à ce résultat lorsque l'espace vectoriel considéré n'est plus de dimension finie. Plaçons-nous dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que la base canonique soit une base orthonormale. Prenons
>
> $$\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n} a_k = 0 \right\}$$
>
> L'inclusion $\mathrm{F} \subset \left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp}$ est toujours vérifiée. Mais il n'est pas très difficile de démontrer que $\mathrm{F}^{\perp} = \{0_{\mathrm{E}}\}$, et l'égalité précédente $\left(\mathrm{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathrm{F}$ est bien entendu fausse !
>
> Il faut donc faire très attention lorsqu'on manipule ces objets, surtout en début de sujet...

Démontrons enfin le dernier résultat :

$$\forall f \in \mathcal{C} \qquad \Pi_h(f) = \Pi_h^1(f) = f - \frac{\langle f|h\rangle}{\|h\|_2{}^2} h$$

Prenons un vecteur f dans $\mathrm{Vect}\,(h)$, alors la projection de f sur $\mathrm{Vect}\,(h)^{\perp}$ est nulle et on a $\Pi_h(f) = 0 = \Pi_h^1(f)$ d'après la définition de h.

Fixons alors un vecteur f dans $\mathrm{Vect}\,(h)^{\perp}$, ce vecteur est son propre projeté orthogonal sur $\mathrm{Vect}\,(h)^{\perp}$ et on a $\Pi_h(f) = f$. De plus $\Pi_h^1(f) = f$.

On en conclut que les applications linéaires Π_h^1 et Π_h coïncident sur deux sous-espaces supplémentaires et donc qu'elles sont égales.

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C} \qquad \Pi_h(f) = f - \frac{\langle f|h\rangle}{\|h\|_2{}^2} h} \qquad \textbf{(2)}$$

B Notons $\mathrm{D}_2 : \xi \longmapsto \xi''$ l'application qui à un élément ξ de $\mathcal{A}$ associe sa dérivée seconde. Commençons par démontrer que $\mathrm{D}_2\,(\mathcal{A}) \subset \mathscr{H}$.

Prenons un élément ξ de $\mathcal{A}$ et calculons le produit scalaire $\langle \mathrm{D}_2(\xi)|u\rangle$: