CCP Maths 2 PSI 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thomas Chomette (ENS Ulm) ; il a été relu par Aurélien Alvarez (ENS Lyon) et Walter Appel (professeur en CPGE).

Ce problème est composé de trois parties, les deux premières étant indépendantes l'une de l'autre. La troisième partie, quant à elle, utilise un certain nombre de résultats de la deuxième, ainsi que ceux de la première partie pour les dernières questions. Ce sujet est intéressant et nécessite dans l'ensemble un assez bon niveau.

Le sujet principal est l'irrationnalité de certains réels, dont ceux de la forme :

$$\frac{1}{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{\mu}\right)}$$

où μ est un entier naturel non nul.

On y exhibe au passage des suites de rationnels encadrant ces nombres de manière fine, pour finir avec leur développement en fraction continue.

- La première partie tourne autour de l'étude d'une famille d'équations différentielles linéaires homogènes :

$$x^2y'' + \left(n - n^2 - x^2\right) y = 0 \qquad (\mathrm{E}_n)$$

  Après avoir déterminé les solutions de (E_0), on s'intéresse aux solutions développables en série entière de l'équation (E_n). En effet, cette équation admet une seule solution y_n développable en série entière (à une constante multiplicative près), définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Les relations vérifiées par les coefficients de chacune de ces fonctions y_n permettent, à la fin de la partie, d'établir une relation de récurrence entre ces fonctions.

- La deuxième partie traite de suites définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Deux suites sont introduites, vérifiant la même relation de récurrence. On montre que le rapport de ces deux suites tend alors vers un irrationnel et que ces suites permettent d'obtenir des encadrements rationnels précis de cette limite.

- Enfin, la troisième partie fait le lien entre cette suite de rapports et le développement en fraction continue de la limite. On y établit qu'il y a une correspondance bijective entre les irrationnels et les développements en fraction continue infinis, et l'on donne un algorithme permettant de calculer ce développement.

  À la fin de la partie, on s'intéresse plus particulièrement aux nombres de la forme $\dfrac{1}{\operatorname{th}\left(\dfrac{1}{\mu}\right)}$, où μ est un entier naturel non nul. La relation de récurrence de la première partie nous permet de calculer sans aucun effort leur développement en fraction continue, par une méthode assez originale. Au passage, on obtient également leur irrationnalité.

Indications

Partie I

I.1.2 Recoller les solutions trouvées à la question précédente.

I.2.1 Poser $x = 0$ dans l'équation (E_n) et dans l'équation obtenue par dérivation.

I.2.3 Faire une récurrence.

I.2.4 Procéder de même par récurrence.

I.2.5 Se rappeler que si y est solution de (E_n), alors λy l'est aussi, pour tout réel λ.

I.2.6 Utiliser le critère d'Abel.

I.5.1 Utiliser un argument de parité.

I.5.2 Comparer terme à terme les sommes définissant $\varphi_n(x)$ et $\varphi_{n+1}(x)$.

Partie II

II.1 Faire une récurrence forte, avec comme hypothèse de récurrence

$$\forall k \leqslant n \qquad q_k \geqslant k$$

II.3.2 Utiliser les expressions de la question II.3.1 et la minoration obtenue à la question II.1.

II.4.2 S'inspirer du graphe pour localiser r_1.

II.5.5 Utiliser les encadrements de r_1 et r_2.

II.5.6 Utiliser le caractère adjacent des suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III

III.1.2 Démontrer un résultat plus fort : si $[a_0, \ldots, a_n] = p_n/q_n$ quelle que soit la valeur de a_n, alors on a le même résultat au rang $n+1$.

III.1.4 Faire une récurrence.

III.2.2 Considérer la suite $(a_{k+n})_{n\in\mathbb{N}}$, elle aussi dans S.

III.2.4 Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

III.3.1 Utiliser la question I.3.1 pour exprimer $\dfrac{1}{\mathrm{th}\left(\dfrac{1}{\mu}\right)}$ à l'aide des fonctions φ_n, puis la relation de récurrence démontrée à la question I.5.3.

Partie I

I.1.1 L'équation différentielle (E_0) est l'équation $x^2y'' - x^2y = 0$. Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0\,[$ et $]\,0\,;+\infty\,[$, le terme x^2 ne s'annule pas, et donc (E_0) devient :

$$y'' - y = 0$$

Sur l'intervalle $]-\infty\,;0\,[$ comme sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$\boxed{x \longmapsto \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}}$$

I.1.2 Une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ tout entier, si elle existe, est obtenue en recollant des solutions obtenues sur $]-\infty\,;0\,[$ et sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Pour toute solution y sur $\mathbb{R}$, il existe donc quatre constantes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}'$ et B' telles que :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in\,]-\infty\,;0\,[\qquad & y(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} \\ \forall x \in\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad & y(x) = \mathrm{A}'e^x + \mathrm{B}'e^{-x} \end{array}$$

Pour qu'une telle fonction soit solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire qu'elle et ses deux dérivées successives soient continues en 0. Une condition nécessaire pour que y soit solution de (E_0) est donc :

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x)$$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A}' + \mathrm{B}' \\ \mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A}' - \mathrm{B}' \end{cases}$$

On obtient
$$\mathrm{A} = \mathrm{A}' \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \mathrm{B}'$$

c'est-à-dire que la fonction y doit être de la forme $x \longmapsto \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, avec A et B deux constantes. Inversement, une telle fonction est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les solutions sur } \mathbb{R} \text{ de } (\mathrm{E}_0) \text{ sont les fonctions de la} \\ \text{forme } x \longmapsto \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x}\text{, avec A et B deux réels fixés.}\end{array}}$$

> Pour répondre *stricto sensu* à la question de l'énoncé, on n'a pas besoin de tout ceci. On remarque en effet que les fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$, et que donc l'équation (E_0) admet bien des solutions sur $\mathbb{R}$. Il suffit en théorie d'exhiber une solution complètement triviale (par exemple $x \longmapsto e^x$). Il est cependant probable que le correcteur attende ici que l'on détermine exactement l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_0).

I.2.1 Sur son disque ouvert de convergence, la série entière $y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et l'on a les relations suivantes entre coefficients de la série entière et dérivées successives en 0 :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$$

On a donc $u_0 = y(0)$ et $u_1 = y'(0)$. Or, en posant $x = 0$ dans l'équation (E_n), on obtient :

$$(n-n^2)y(0)=0$$

soit, pour $n \geqslant 2$, $y(0)=0$, et donc $u_0=0$. Ensuite, la fonction y étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, on peut dériver l'équation (E_n) sur un intervalle centré en 0. On obtient l'équation :

$$2xy''+x^2y^{(3)}-2xy+\left(n-n^2-x^2\right)y'=0$$

En posant $x=0$ dans cette équation, on trouve ici $(n-n^2)y'(0)=0$, et donc également $u_1=0$.

$$\boxed{u_0=u_1=0}$$

> On peut aussi retrouver ces deux valeurs en remplaçant dans l'équation (E_n) la fonction y par son développement en série entière. C'est ce que nous allons faire à la question suivante pour déterminer des relations entre les coefficients u_k.

I.2.2 La fonction y est développable en série entière, et son développement $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$ possède un rayon de convergence R strictement positif. La fonction y est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, et l'on peut dériver deux fois terme à terme pour obtenir :

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[\qquad y''(x)=\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)u_k x^{k-2}$$

En remplaçant dans (E_n) les fonctions y'' et y par leurs développements en série entière, on obtient :

$$x^2\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)u_k x^{k-2}+\left(n-n^2-x^2\right)\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k=0$$

soit, en regroupant les termes de même degré :

$$(n-n^2)\times(u_0+u_1x)+\sum_{k=2}^{+\infty}\left(k(k-1)u_k+(n-n^2)u_k-u_{k-2}\right)x^k=0$$

Or, une série entière est nulle (sur un ouvert) si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On obtient :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2 \qquad \left(k(k-1)+n(1-n)\right)u_k=u_{k-2}}$$

I.2.3 Montrons par récurrence (finie) sur k que, pour tout entier $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$, on a la propriété $\mathcal{P}(k)$: $u_k=0$.

- $\underline{\mathcal{P}(0)}$ et $\underline{\mathcal{P}(1)}$ sont vraies d'après la question I.2.1.
- $\underline{\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+2)}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-3)$: on suppose donc $\mathcal{P}(k)$ vraie. Le résultat de la question précédente appliqué à l'entier $k+2$, puis l'hypothèse de récurrence, nous donnent l'égalité :

  $$\left((k+2)\times(k+1)+n(1-n)\right)u_{k+2}=u_k=0$$

  Or, par hypothèse, $k \leqslant n-3$, et donc $k+2<n$, d'où

  $$(k+2)\times(k+1)<n(n-1)$$

  et donc $$(k+2)\times(k+1)+n(1-n)\neq 0$$

  Il vient $u_{k+2}=0$, c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.