X Physique 1 PC — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hicham Qasmi (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) et Vincent Fourmond (ENS Ulm).

Le problème aborde différents modèles de l'atmosphère. Il est long et de difficulté croissante, les questions devenant de plus en plus qualitatives. Sa résolution ne fait appel qu'à des relations de base : l'équation de l'hydrostatique puis celle de l'hydrodynamique, la loi de Laplace et les formules de cinématique du point. Il ne faut surtout pas négliger les applications numériques : ici, elles comptent énormément.

- La première partie compare le modèle de l'atmosphère en équilibre isotherme avec celui de l'atmosphère en équilibre adiabatique. Le premier permet de se donner une idée de la distribution de l'air tandis que le second, plus réaliste, permet de déterminer la taille caractéristique des domaines élémentaires utilisés en météorologie.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse à la dynamique de l'air : les mouvements verticaux et horizontaux sont étudiés de manière découplée. On justifie au passage la modélisation en couches d'air horizontales adoptée dans la première partie. Enfin, un modèle de vent horizontal est analysé : le vent géostrophique. Cette partie se conclut par l'étude des conditions nécessaires à la pertinence de ce modèle.
- La troisième partie propose une analyse plus raffinée afin d'expliquer le comportement du vent horizontal, dans le cas où le modèle précédent en est incapable. Elle est la plus qualitative et nécessite une bonne compréhension du problème pour dresser les schémas demandés.

Indications

Partie I

I.3.b Que constate-t-on en pratique au sommet de la troposphère ?

I.4.a La température devient une inconnue mais on a une nouvelle équation. Penser à la méthode de séparation des variables.

I.4.e On peut estimer L_z sachant que $\|\overrightarrow{\nabla}_\mathrm{h}\mathrm{P}\|$ fournit une estimation du rapport $\Delta\mathrm{P}/\mathrm{L}_z$, $\Delta\mathrm{P}$ étant la variation de pression.

Partie II

II.2.a Utiliser le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel.

II.3.a Quel est le mouvement du point coïncidant avec M dans R_0 ? La valeur de ω n'est pas donnée car elle est simple à calculer.

II.3.b La force de Coriolis n'est pas incluse dans le champ de pesanteur. Pour justifier que le champ de pesanteur est localement constant, on pourra utiliser l'estimation de Γ_{E_0}.

II.5.b La table 1 donne le temps typique des mouvements verticaux. Les couches horizontales d'air peuvent-elles être considérées comme étant en équilibre ?

II.6.a Que dire de la vitesse verticale par rapport à la vitesse horizontale ?

II.6.d Comparer $\overrightarrow{\Gamma_\mathrm{h}}$ à $\overrightarrow{f_\mathrm{Ch}}$ puis à $\overrightarrow{f_\mathrm{Ph}}$.

II.7.b Pour le schéma, on se souviendra que le gradient de pression est orthogonal aux isobares.

II.7.d Pour trouver une deuxième condition, on peut s'intéresser à la forme des isobares dans une zone où l'approximation géostrophique est valable.

Partie III

III.2.a Comment évolue la pression le long d'une trajectoire ?

III.2.b Pour évaluer le rayon de courbure, s'appuyer sur la figure 1.

III.2.c Le signe de la courbure dépend du sens de parcours de la trajectoire et de l'orientation du plan. Penser aussi à relier le gradient avec les zones de dépressions et d'anticyclones.

III.2.d Il y a un lien entre la vitesse de croissance d'une fonction et la norme de son gradient : cette dernière est d'autant plus grande que la fonction varie rapidement sur des distances faibles.

I. Modèles d'équilibre de l'atmosphère

I.1 L'équation d'état du gaz parfait est, avec n la quantité de gaz

$$\mathrm{PV} = n\,\mathrm{RT}$$

Soit m la masse de gaz. Comme $\rho = \dfrac{m}{\mathrm{V}}$ et $m = n\,\mathrm{M_a}$, on a

$$\boxed{\rho = \frac{\mathrm{PM_a}}{\mathrm{RT}}}$$

Application numérique : $\boxed{\rho_0 = 1,3\ \mathrm{kg.m^{-3}}}$

I.2.a Considérons un élément de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$. Il subit l'action du champ de pesanteur et celle des forces de pression. La résultante volumique des forces de pression est $-\overrightarrow{\nabla}\mathrm{P}$, si bien que

$$\rho\,\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{\Gamma} = \rho\,\mathrm{d}\tau\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla}\mathrm{P}\,\mathrm{d}\tau$$

À l'équilibre, l'accélération est nulle, d'où l'équation

$$\boxed{\overrightarrow{0} = \rho\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\nabla}\mathrm{P}}$$

I.2.b En projetant cette équation sur la base cartésienne, on obtient

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} \\ 0 = -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \\ 0 = -\rho g - \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} \end{cases}$$

On déduit des deux premières équations que P ne dépend que de z. En substituant à ρ son expression obtenue à la question I.1, on obtient pour P l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} + \frac{g\,\mathrm{M_a}}{\mathrm{RT}}\,\mathrm{P} = 0}$$

I.3.a Comme g est localement constant et T uniforme, P obéit à une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La solution, qui est donc exponentielle, s'écrit

$$\boxed{\mathrm{P}(z) = \mathrm{P_0}\exp\left(-\frac{z}{\mathrm{H}}\right) \qquad \text{avec} \quad \mathrm{H} = \frac{\mathrm{RT}}{g\,\mathrm{M_a}}}$$

Pour $\mathrm{T_0} = 273$ K, on trouve $\boxed{\mathrm{H_0} = 8,0\ \mathrm{km}}$

I.3.b La hauteur d'échelle est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la troposphère. Or, en pratique, on s'aperçoit que la temérature diminue avec l'altitude pour atteindre un minimum de l'ordre de $-60°\mathrm{C}$. L'hypothèse d'atmosphère isotherme est donc hautement criticable. Elle donne néanmoins une idée de la distribution de la pression.

I.4.a Dans le modèle de l'équilibre adiabatique, T devient une inconnue mais on dispose d'une équation supplémentaire grâce à la loi de Laplace. P ne dépend toujours que de z car aucune force ne s'exerce sur les axes Ox et Oy. Dans la loi de Laplace, la constante K se trouve en se plaçant en $z = 0$.

L'équation différentielle vérifiée par P est la suivante :

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} + \rho g = 0$$

Comme $\rho = \rho_0 \left(\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ et $\rho_0 g = \dfrac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{H}_0}$, elle devient

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{H}_0}\,\frac{\mathrm{P}^{\frac{1}{\gamma}}}{{\mathrm{P}_0}^{\frac{1}{\gamma}}} = 0$$

Cette équation s'intègre en séparant les variables P et z.

$$\frac{\mathrm{P}^{-\frac{1}{\gamma}}}{{\mathrm{P}_0}^{-\frac{1}{\gamma}}}\,\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}_0} = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{H}_0}$$

On intègre la pression de P_0 à P et l'altitude de 0 à z.

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{\mathrm{P}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{{\mathrm{P}_0}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - 1\right) = -\frac{z}{\mathrm{H}_0}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{P}(z) = \mathrm{P}_0\left(1 - \frac{z}{\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{H}_o}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Calculons maintenant la température. Comme $\rho = \dfrac{\mathrm{PM_a}}{\mathrm{RT}}$, la loi de Laplace s'écrit aussi

$$\mathrm{P}^{1-\gamma}\mathrm{T}^{\gamma} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Cette constante s'exprime en fonction de T_0 et P_0, ce qui donne

$$\mathrm{P}^{1-\gamma}\mathrm{T}^{\gamma} = \mathrm{P}_0^{1-\gamma}\mathrm{T}_0^{\gamma}$$

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0} = \left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Finalement

$$\boxed{\mathrm{T}(z) = \mathrm{T}_0\left(1 - \frac{z}{\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{H}_0}\right)}$$

I.4.b La température est une fonction affine de z, donc le gradient vertical de température est constant. Il vaut