Mines Physique 2 PC 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (ENS Lyon) ; il a été relu par Jean-Julien Fleck (ENS Ulm) et Jean-David Picon (École Polytechnique).

Cette épreuve de mécanique des fluides étudie quelques aspects du ressaut hydraulique. Chacun a pu observer ce phénomène au fond d'un évier : autour du jet du robinet, il se forme une mince couche de fluide en écoulement laminaire et, à quelques centimètres du centre du jet, on trouve un « bourrelet » de fluide. C'est cette variation brutale de hauteur de fluide qui fait l'objet de ce sujet.

- La première partie traite de la modélisation de ce phénomène par un écoulement de fluide parfait, ce qui est l'hypothèse la plus simple. Si, grâce au théorème de Bernoulli, on parvient à proposer une formule pour le rayon du ressaut, on aboutit cependant à une contradiction puisque l'écoulement perd de l'énergie.
- Dans une seconde partie, plus longue, on essaie donc d'affiner la première description en prenant en compte la viscosité avec un modèle simple, le modèle de Godwin.

Ce sujet est d'une longueur raisonnable mais il n'est cependant pas facile à traiter car il demande un certain recul sur le programme de mécanique des fluides. Le théorème de Bernoulli constitue le point central de la première partie, mais il n'est pas exploité de manière tout à fait classique. Seules les questions 18 à 21 sont réellement calculatoires. Ce sujet est globalement intéressant et il permet d'établir quelques résultats non triviaux. On ne peut que regretter cependant les erreurs de l'énoncé : à la question 6 où il est fait référence à un théorème hors programme (et inutile) et à la question 23 où s'est glissée une coquille.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Première partie

4 Montrer que, en négligeant un terme dans l'équation obtenue à la question 3, la vitesse $u(r)$ est en fait constante.

Réécrire alors le théorème de Bernoulli avec la vitesse et dériver l'expression obtenue par rapport à r.

Le dernier résultat de cette question est la traduction directe de la conservation du débit volumique entre le jet et l'écoulement radial avant le ressaut.

5 Pour cette question et la suivante, l'élément de masse correspondant à l'élément de volume décrit par l'énoncé est le système qu'il s'agit de suivre et dont on cherche à caractériser l'évolution. Remarquer que ce système se déforme lors du passage du ressaut mais est fermé (il n'y a pas d'échange de matière).

6 Le théorème d'Euler est non seulement hors programme mais surtout inutile puisque le système est fermé : appliquer simplement le principe fondamental de la dynamique au système défini à la question 5.

9 Pour calculer la puissance des forces de pression, il faut bien séparer les deux contributions de chaque « face » (du côté où la hauteur est h_1 et la vitesse u_1 et du côté où la hauteur est h_2 et la vitesse u_2). Attention, on ne peut pas utiliser la résultante calculée à la question 6...

Pour vérifier la conservation de l'énergie cinétique, faire tout de suite l'hypothèse $h_2 \gg h_1$. Pour interpréter la conclusion, remarquer que la variation d'énergie cinétique comme la puissance des forces de pression sont négatives.

Deuxième partie

15 Exprimer h_1 de deux façons différentes : avec la relation (**1**) et avec l'hypothèse que la couche limite a une épaisseur $\delta = h_1$.

18 Pour calculer $u_{\rm s}(r)$, il suffit de calculer le débit volumique q sur un cylindre de rayon r et de hauteur $h(r)$ en faisant attention au fait que la vitesse dépend maintenant de x.

19 Il faut être bien soigneux dans le calcul : le volume $\mathrm{d}\tau$ défini par l'énoncé constitue un système fermé déformable qui passe, entre t et $t + \mathrm{d}t$ de la position r à la position $r + \mathrm{d}r$. Commencer par calculer la quantité de mouvement de l'élément $\mathrm{d}\tau$ à l'instant t.

20 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'élément de fluide de masse $\rho\,\mathrm{d}\tau$.

23 Pour démontrer l'expression de la puissance des forces de viscosité, revenir à la définition de la force de frottement qu'exerce une couche de fluide sur le fluide placé en dessous de lui (c'est cette action qui permet de définir la viscosité dynamique).

Une coquille s'est glissée dans l'expression du flux d'énergie cinétique puisque le résultat proposé n'est pas homogène : il faut supprimer l'élément $\mathrm{d}x$ du membre de gauche.

24 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et dériver la relation obtenue par rapport à r.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

I. Première modélisation : écoulement parfait

1 Le problème fait apparaître différentes échelles caractéristiques *indépendantes* :

- une échelle de longueur a ;
- une échelle de vitesse u_0 ;
- une échelle d'accélération g ;

On suppose que l'ensemble de ces trois échelles forme un système complet. Toutes les autres grandeurs du problème peuvent s'exprimer en fonction de ces échelles. R est homogène à une longueur. On peut donc exprimer R comme le produit d'une longueur particulière du problème, ici a, par une fonction qui dépend uniquement de nombres sans dimension caractéristiques du problème. À partir des échelles indépendantes du problème, on cherche donc à construire un nombre sans dimension. Pour cela, on cherche des entiers α, β et γ tels que

$$[a]^\alpha\,[u_0]^\beta\,[g]^\gamma = 1$$

> Il convient de préciser ce que l'on entend par « échelle indépendante ». Cela signifie que l'on peut choisir de modifier la valeur d'une seule de ces grandeurs sans que les deux autres ne soient modifiées. C'est pourquoi R n'est pas une échelle indépendante : il est clair que sa valeur dépend du système choisi donc en particulier des choix de a, u_0 et g.
>
> On utilise des notations conventionnelles que l'on rappelle brièvement ici : les crochets désignent « la dimension de » et les dimensions fondamentales longueur, masse, temps sont notées respectivement L, M, T.

En remplaçant les dimensions des échelles caractéristiques, on obtient

$$(\mathrm{L})^\alpha\,\left(\mathrm{L\,T^{-1}}\right)^\beta\,\left(\mathrm{L\,T^{-2}}\right)^\gamma = 1$$

d'où

$$\mathrm{L}^{\alpha+\beta+\gamma}\,\mathrm{T}^{-(\beta+2\,\gamma)} = 1$$

Cette égalité ne peut être réalisée que si les exposants de L et T sont nuls ce qui implique

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = 0\\ \beta+2\,\gamma = 0\end{cases}$$

On a un système de deux équations à trois inconnues : on peut choisir de tout exprimer en fonction de α par exemple. On obtient

$$\begin{cases}\beta = -2\,\alpha\\ \gamma = \alpha\end{cases}$$

Sans restreindre la généralité de cette démonstration, on peut choisir *n'importe quelle valeur non nulle* pour α. Si l'on prend par exemple $\alpha = -1$, on a le paramètre sans dimension ${u_0}^2/a\,g$. On obtient donc

$$\boxed{\mathrm{R} = a\,f\left(\frac{{u_0}^2}{a\,g}\right)\quad\text{avec}\quad f\ \text{fonction indéterminée}}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

2 On a un écoulement permanent de fluide parfait. On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant. Choisissons une ligne de courant à la surface de l'écoulement. Si P désigne la pression et u la vitesse, on a

$$\frac{\mathrm{P}}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g\,h(r) = \mathrm{C^{te}}$$

La ligne de courant choisie est soumise à la pression atmosphérique $\mathrm{P_0}$ donc le terme de pression peut être incorporé à la constante. Il reste donc

$$\frac{u^2}{2} + g\,h(r) = \mathrm{C^{te}}$$

Par hypothèse, u ne dépend que de r. Le débit volumique qui traverse un cylindre de base le cercle de rayon r et de hauteur $h(r)$ s'écrit donc simplement

$$q = 2\pi\,r\,h(r)\,u(r)$$

En remplaçant $u(r)$ dans l'équation de Bernoulli, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{q^2}{8\pi^2\,r^2\,h^2(r)} + g\,h(r) = \mathrm{C^{te}} = \mathrm{K}}$$

3 Évaluons, compte tenu des valeurs typiques fournies par l'énoncé, le rapport des deux termes de l'équation précédente en $r = \mathrm{R}$:

$$\frac{q^2}{8\,g\,\pi^2 \mathrm{R}^2 {h_1}^3} \approx 13$$

On se place maintenant en $r = a$. Puisque la vitesse est continue, on peut supposer que la vitesse radiale est à peu près u_0 à cet endroit. La conservation du débit volumique implique

$$q = \pi\,u_0 a^2 = 2\pi\,u_0\,a\,h(a)$$

d'où
$$h(a) \approx \frac{a}{2}$$

On peut alors à nouveau calculer le rapport

$$\frac{q^2}{g\,\pi^2 a^5} \approx 360$$

On constate donc que le premier terme est au moins d'un ordre de grandeur supérieur au second entre $r = a$ et $r = \mathrm{R}$. On choisit donc de négliger le second terme. Plus on s'approche du centre, tout en restant en dehors du jet, meilleure est l'approximation. Cependant, si l'on pénètre dans le jet, elle n'est plus valable car on ne suit plus une même ligne de courant : le théorème de Bernoulli ne s'applique plus et la hauteur h n'est plus définie.

4 On déduit de la question précédente

$$\boxed{\mathrm{K} = \frac{q^2}{8\pi^2\,\mathrm{R}^2\,{h_1}^2}}$$

Or, on a vu à la question 2, lors de l'application du théorème de Bernoulli que

$$\frac{u^2(r)}{2} = \frac{q^2}{8\pi^2\,r^2\,h^2(r)}$$

On a donc
$$\frac{u^2(r)}{2} = \mathrm{K}$$

$$\boxed{\text{La vitesse } u(r) \text{ est constante avant le ressaut.}}$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .