X Maths 1 PC 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Walter Appel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Alexis Devulder (ENS Ulm) et David Lecomte (ENS Cachan).

Ce problème, constitué de deux parties dépendant l'une de l'autre et d'une courte partie préliminaire, traite d'un problème d'optimisation, c'est-à-dire de minimisation d'une quantité dépendant d'un paramètre. On y trouve donc, comme on peut s'y attendre, quelques techniques de calcul différentiel. La quantité à optimiser dépend en fait de la solution d'une équation différentielle linéaire, dont le second membre est justement le paramètre susdit. Des techniques provenant des équations différentielles (et notamment un usage intensif du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire) sont donc également mises en jeu. Enfin, une application à un cas simple est proposée.

- La partie préliminaire sert essentiellement à rappeler quelques propriétés de l'exponentielle d'une matrice.
- Dans la première partie, on étudie l'application qui, à une fonction U définie sur un intervalle $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, associe la solution $\mathrm{X_U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ de l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}t}(t) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{X}(t) + \mathrm{K}\cdot\mathrm{U}(t)$$
(où K est une matrice $p\times q$ constante) satisfaisant une condition initiale donnée. Notamment, on dégage une condition nécessaire et suffisante pour que le coût de cette solution (qui est une quantité quadratique) soit minimal par rapport à l'ensemble des fonctions U continues par morceaux.
- Dans la seconde partie, on étend la condition précédente au cas où l'on astreint la fonction U à prendre ses valeurs dans un compact de la forme $[\,a\,;b\,]^q$.

Le candidat est bien guidé tout au long de cette épreuve ; les difficultés sont bien réparties : il n'y a pas de question vraiment difficile, mais beaucoup de questions demandent un peu de réflexion avant de se lancer dans les calculs. On y rencontre un peu d'algèbre linéaire, peu de topologie, un peu d'algèbre bilinéaire, une série à valeurs dans un espace vectoriel normé, bref, de quoi revoir une bonne partie du programme de l'année.

Indications

Partie préliminaire

1.a Montrer que $|||\lambda \mathrm{M}||| \leqslant |\lambda|\ |||\mathrm{M}|||$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ puis en déduire

$$|||\lambda \mathrm{M}||| = |\lambda|\ |||\mathrm{M}|||$$

2.a Montrer, en utilisant une inégalité triangulaire, que la suite $\big(\mathrm{S}_n(\mathrm{M})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans un espace vectoriel normé complet.

2.b Utiliser la convergence normale de la série dérivée pour dériver terme à terme.

2.c Montrer que M et $\mathrm{e}^{t\mathrm{M}}$ commutent.

Première partie

3.a Utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire relatif à un système d'équations différentielles de la forme $\mathrm{X}(t)' = \mathrm{AX}(t)$ pour montrer l'unicité de la solution.

3.b Pour montrer l'unicité, la continuité de X permet d'imposer une condition initiale (originellement en $t_0 = 0$) en t_1, t_2,... jusqu'à t_k.

4 En utilisant la question 3, établir une expression de $\mathrm{X_U}$ et de $\mathrm{X}_{\mathrm{U}+\lambda\mathrm{V}}$. En déduire une définition de $\mathrm{Y_V}$.

6.a Penser encore à Cauchy-Lipschitz !

6.b Calculer la dérivée du produit $(\mathrm{Z}|\mathrm{Y})$ et se souvenir que la transposée d'une matrice est l'équivalent matriciel de l'adjoint.

7.b Poser $\mathrm{V} = \mathrm{K}^*\mathrm{Z_U} + 2\beta\mathrm{U}$ pour montrer le sens direct. Pour la réciproque, utiliser le résultat de la question 5.

Deuxième partie

9 Montrer que, pour tout choix de $\mathrm{V} \in \widehat{\mathcal{U}}$, le coefficient de λ dans le polynôme de la question 5 doit être positif. Puis procéder par l'absurde en supposant l'existence de $\mathrm{V} \in \widehat{\mathcal{U}}$ et $t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,]$ tels que

$$\big(\mathrm{K}^*\,\mathrm{Z}_{\mathrm{U}_0}(t) + 2\beta\mathrm{U}_0(t)\big|\mathrm{V}(t) - \mathrm{U}_0(t)\big) < 0$$

Construire une application W égale à U_0 sauf dans un voisinage de t sur lequel $\big(\mathrm{K}^*\,\mathrm{Z}_{\mathrm{U}_0}(s) + 2\beta\mathrm{U}_0(s)\big|\mathrm{V}(s) - \mathrm{U}_0(s)\big) < 0$.

10.c Expliciter Z_u et montrer que $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}^*}$ est affine par rapport à t.

11.b Montrer que $\mathrm{K}^*\mathrm{Z}_{u_0}$ est une fonction affine (à valeurs dans $\mathbb{R}$) non identiquement nulle. En déduire, en utilisant la question 9, que u_0 est constante sur chaque intervalle où cette fonction est de signe constant.

12.b Utiliser la caractérisation de la question 9.

12.c Calculer le coût d'une autre fonction constante par morceaux égale successivement à a et à $-a$; minimiser ce coût.

Partie préliminaire

1.a Pour que l'application $|||\cdot|||$ soit une norme, elle doit vérifier les propriétés suivantes, que nous allons démontrer :

$$\left\{\begin{array}{lrl} \text{Positivité} & \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_p & |||\mathrm{M}||| \in \mathbb{R}^+ \\ \text{Séparation} & \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_p & |||\mathrm{M}||| = 0 \Longrightarrow \mathrm{M} = 0 \\ \text{Homogénéité} & \forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} & |||\lambda \mathrm{M}||| = |\lambda| \cdot |||\mathrm{M}||| \\ \text{Inégalité triangulaire} & \forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in {\mathcal{M}_p}^2 & |||\mathrm{M}+\mathrm{N}||| \leqslant |||\mathrm{M}||| + |||\mathrm{N}||| \end{array}\right.$$

Positivité. Elle se démontre de façon immédiate puisque $\|\mathrm{MX}\|$ et $\|\mathrm{X}\|$ sont tous deux positifs pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^p$.

Séparation. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p$ tel que $|||\mathrm{M}||| = 0$. Alors, pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, on a $\|\mathrm{MX}\| = 0$ et donc $\mathrm{MX} = 0$. Ceci implique que $\mathrm{M} = 0$.

Homogénéité. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $\mathrm{Y} \in \mathbb{R}^p \smallsetminus \{0\}$, on a

$$\frac{\|(\lambda\mathrm{M})\mathrm{Y}\|}{\|\mathrm{Y}\|} = \frac{\|\lambda(\mathrm{MY})\|}{\|\mathrm{Y}\|} = |\lambda|\,\frac{\|\mathrm{MY}\|}{\|\mathrm{Y}\|} \leqslant |\lambda| \sup_{\substack{\mathrm{X}\in\mathbb{R}^n \\ \mathrm{X}\neq 0}} \frac{\|\mathrm{MX}\|}{\|\mathrm{X}\|}$$

donc, en passant à la borne supérieure sur Y, on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad |||\lambda\mathrm{M}||| \leqslant |\lambda|\; |||\mathrm{M}|||$$

Montrons l'inégalité inverse. Si $\lambda = 0$, la propriété est évidemment vérifiée. On suppose donc $\lambda \neq 0$ et on applique le résultat précédent à $1/\lambda$ et $\lambda\mathrm{A}$:

$$|||\lambda^{-1}(\lambda\mathrm{A})||| \leqslant |\lambda|^{-1}\; |||\lambda\mathrm{A}|||$$

soit $$|\lambda|\; |||\mathrm{A}||| \leqslant |||\lambda\mathrm{A}|||$$

On a donc bien $$|||\lambda\mathrm{A}||| = |\lambda|\; |||\mathrm{A}|||$$

Inégalité triangulaire. Pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\|(\mathrm{M}+\mathrm{N})\mathrm{X}\| \leqslant \|\mathrm{MX}\| + \|\mathrm{NX}\|$$

On en déduit

$$\sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\|(\mathrm{M}+\mathrm{N})\mathrm{X}\|}{\|\mathrm{X}\|} \leqslant \sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\big(\|\mathrm{MX}\| + \|\mathrm{NX}\|\big)}{\|\mathrm{X}\|} \leqslant \sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\|\mathrm{MX}\|}{\|\mathrm{X}\|} + \sup_{\mathrm{X}\neq 0} \frac{\|\mathrm{MX}\|}{\|\mathrm{X}\|}$$

ce qui établit la dernière propriété.

En résumé $$\boxed{|||\cdot||| \text{ est bien une norme.}}$$

1.b Soient M et N deux matrices carrées d'ordre p. Remarquons la relation fondamentale

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^p \qquad \|\mathrm{MX}\| \leqslant |||\mathrm{M}||| \cdot \|\mathrm{X}\| \tag{$*$}$$

Cette inégalité découle directement de la définition de $|||\mathrm{M}|||$ si $\mathrm{X} \neq 0$ et elle est immédiate si $\mathrm{X} = 0$.

Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^p$ un vecteur non nul. La relation $(*)$ nous permet d'écrire

$$\|(\mathrm{MN})\mathrm{X}\| = \|\mathrm{M}(\mathrm{NX})\| \leqslant |||\mathrm{M}||| \cdot \|\mathrm{NX}\| \leqslant |||\mathrm{M}||| \cdot |||\mathrm{N}||| \cdot \|\mathrm{X}\|$$

Cette relation étant valable pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^p$ non nul, on en déduit, en la divisant par $\|\mathrm{X}\|$ et en prenant la borne supérieure, que $|||\mathrm{MN}||| \leqslant |||\mathrm{M}||| \cdot |||\mathrm{N}|||$.

$$\boxed{\forall\, \mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{M}_p \qquad |||\mathrm{MN}||| \leqslant |||\mathrm{M}||| \cdot |||\mathrm{N}|||}$$

2.a Pour montrer la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{k!}\mathrm{M}^k$, montrons qu'elle de Cauchy.

Tout d'abord, en utilisant le résultat de la question précédente, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \left|\left|\left| \frac{1}{k!}\,\mathrm{M}^k \right|\right|\right| = \frac{1}{k!}\,|||\mathrm{M}^k||| \leqslant \frac{|||\mathrm{M}|||^k}{k!} \tag{$\mathbf{3}$}$$

Montrons maintenant que la série $\sum \dfrac{1}{k!}\mathrm{M}^k$ satisfait au critère de Cauchy.

Soit ε un réel strictement positif. La série $\sum \dfrac{|||\mathrm{M}|||^k}{k!}$ étant convergente, elle est de Cauchy ; il existe donc un entier N tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad p > q > \mathrm{N} \Longrightarrow \sum_{k=p}^{q} \frac{|||\mathrm{M}|||^k}{k!} \leqslant \varepsilon$$

L'inégalité triangulaire et l'inégalité $(\mathbf{3})$ nous permettent alors d'écrire

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad p > q > \mathrm{N} \Longrightarrow \left|\left|\left| \sum_{k=p}^{q} \frac{1}{k!}\mathrm{M}^k \right|\right|\right| \leqslant \sum_{k=p}^{q} \left|\left|\left| \frac{1}{k!}\,\mathrm{M}^k \right|\right|\right| \leqslant \varepsilon$$

La série $\sum \dfrac{1}{k!}\mathrm{M}^k$ est donc bien de Cauchy. Or, cette série est à valeurs dans $\mathcal{M}_p$ qui, muni de $|||\cdot|||$, est un espace vectoriel normé de dimension finie et, à ce titre, est *complet*. Par conséquent :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{k!}\mathrm{M}^k \text{ converge dans } \mathcal{M}_p.}$$

> Nous sommes dans un cas particulier du théorème général : *dans un espace vectoriel normé* complet*, toute série normalement convergente est convergente.* Cette propriété est d'ailleurs caractéristique des espaces complets.