Mines Maths 1 PC 2002 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Lecomte (ENS Cachan) ; il a été relu par Éric Ricard (agrégé de mathématiques) et Walter Appel (professeur en CPGE).

Ce sujet des Mines nous fait étudier une fonction F définie comme somme d'une série. Son but est de rechercher le comportement de F en $+\infty$. Il se compose de trois parties.

- Dans la première partie, on étudie des propriétés élémentaires de F : ensemble de définition, variations, encadrement par des fonctions usuelles. On introduit aussi une fonction Φ dont on montre dans la suite du problème qu'elle est équivalente à F, à une constante multiplicative près.
- Dans la deuxième partie, on calcule la transformée de Laplace de F par des théorèmes d'interversion de somme et d'intégrale. Puis on étudie quelques propriétés générales de la transformation de Laplace. On montre par exemple que la tranformée de Laplace $\mathrm{L}(f)$ d'une fonction f a pour ensemble de définition un intervalle $\mathrm{I}(f)$ de la forme $]\alpha(f), +\infty[$ ou $[\alpha(f), +\infty[$.

  On montre par la suite que si deux fonctions g et h, positives, continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrables au voisinage de 0, ont le même comportement en $+\infty$, alors $\alpha(g) = \alpha(h)$ et $\mathrm{L}(h) \underset{\alpha(h)}{\sim} \mathrm{L}(g)$.

  On montre enfin que $2\sqrt{\pi}\,\mathrm{L}(\mathrm{F}) \underset{\alpha(\mathrm{F})}{\sim} \mathrm{L}(\Phi)$. Puis on prend le résultat précédent à rebours pour conjecturer que $2\sqrt{\pi}\,\mathrm{F} \underset{+\infty}{\sim} \Phi$.
- Enfin, dans la troisième partie, on calcule rigoureusement un équivalent de F en $+\infty$ et l'on vérifie que la conjecture est vraie.

Il s'agit d'un problème d'analyse assez long mais de difficulté moyenne. On y manipule essentiellement des intégrales, des séries et les notations de Landau (petit « o », grand « O »). Il faut donc être très au point sur ces notions.

La partie sur la transformation de Laplace comporte un passage original et intéressant (questions II.2 et II.3).

Indications

Première partie

I.1 Utiliser la règle de d'Alembert pour trouver le domaine de définition de F.

Montrer que tous les termes de la somme définissant F sont convexes et ont les mêmes variations. En déduire les variations et la convexité de F.

I.2.a Étudier le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et sa position par rapport à 1 pour en déduire la décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.2.c La moyenne géométrique de deux réels positifs a et b est $\sqrt{ab}$. Calculer G et en trouver un équivalent.

Deuxième partie

II.1.a Avant toute chose, montrer que l'intégrale proposée existe. Puis trouver une relation de récurrence pour la suite $(\mathrm{I}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ en effectuant une intégration par parties.

II.1.b Utiliser la majoration de F obtenue à la question I.2.a. La transformée de Laplace de F se présente comme l'intégrale d'une série ; utiliser le théorème de convergence monotone pour intervertir les signes « somme » et « intégrale ».

II.1.c Utiliser la majoration et la minoration de $\dfrac{(2n)!}{n!^2}$ obtenues respectivement aux questions I.2.a et I.2.b. Conclure par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

Remarquer que $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2}$ pour se ramener à un développement en série entière connu. Transformer l'expression du terme général de cette série pour faire apparaître $\dfrac{(2n)!}{n!^2}$.

II.1.e Calculer $\mathrm{L}(\Phi)$ à l'aide du changement de variable $u=\sqrt{t}$.

II.2.b Montrer que $\mathrm{I}(f)$ est non vide et minoré pour appliquer l'axiome de la borne inférieure.

Montrer que $]\alpha(f), +\infty[$ est inclus dans $\mathrm{I}(f)$. Distinguer deux cas, suivant que $\mathrm{I}(f)$ contient $\alpha(f)$ ou non.

II.2.c Utiliser le théorème de continuité sous le signe « intégrale » pour établir que $\mathrm{L}(f)$ est continue.

Si f est positive, utiliser la décroissance de l'exponentielle pour établir que $\mathrm{L}(f)(x_2) \leqslant \mathrm{L}(f)(x_1)$ si $x_1 \leqslant x_2$.

II.2.d.ii Montrer que pour tout A positif, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} g(t)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[\alpha(f), +\infty[$. Utiliser la question II.2.d.i et passer à la limite lorsque x tend vers $\alpha(f)$ pour en déduire que cette fonction est bornée sur $[\alpha(f), +\infty[$. Se servir enfin d'une caractérisation de l'intégrabilité des fonctions positives.

II.3.a Montrer que $\mathrm{I}(f)=\mathrm{I}(g)$ en utilisant le fait que deux fonctions positives ayant le même comportement à l'infini y sont simultanément intégrables.

II.3.b Utiliser la contraposée du résultat obtenu à la question II.2.d.ii pour en déduire que $\mathrm{L}(h)$ tend vers l'infini en $\alpha(h)$.

La première inégalité n'est autre que la définition de $g \sim h$. L'inégalité suivante s'obtient en découpant l'intégrale définissant $\mathrm{L}(g-h)$ en une intégrale sur $]0, \mathrm{A}]$ et une autre sur $[\mathrm{A}, +\infty[$. Montrer enfin que la première intégrale est inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2}\mathrm{L}(h)$ en utilisant la question II.3.b.

Troisième partie

III.1.a Penser au théorème de Parseval.

III.1.b Reconnaître dans la série définissant k un développement exponentiel.

III.2.d Utiliser la quantité conjuguée.

III.2.e Effectuer le changement de variable $u = \cos t$ dans l'intégrale définissant $h_1(x)$. Utiliser ensuite la question III.2.d.

Première partie

I.1 Définition de la fonction F

I.1 Soit x un réel non nul. Appliquons la règle de d'Alembert pour voir si la série positive $\sum \dfrac{x^{2n}}{n!^2}$ converge :

$$\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!^2}\,\frac{n!^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

On en déduit que $\sum \dfrac{x^{2n}}{n!^2}$ converge pour tout réel x non nul ; si $x = 0$, cette série ne comporte qu'un terme non nul, celui d'ordre 0, et converge donc également.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de F est } \mathbb{R}.}$$

> La méthode précédente est la plus classique pour déterminer le domaine de définition de F. Cependant, on peut identifier $\mathcal{D}_\mathrm{F}$ sans faire appel à la règle de d'Alembert, par comparaison de termes généraux de séries. En effet, pour tout réel x, on a
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\frac{x^{2n}}{n!^2}\right| = \frac{x^{2n}}{n!^2} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}$$
>
> Le membre de gauche est le terme général du développement en série entière de $\exp(x^2)$, dont on sait qu'il converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\mathrm{F}(x)$ est bien défini.

$\mathrm{F}(x)$ est somme d'une série de puissances paires de x, affectées de coefficients positifs. Toutes les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^{2n}}{n!^2}$ sont décroissantes sur $]-\infty, 0]$, croissantes sur $[0, +\infty[$ et convexes. Par conséquent,

$$\boxed{\text{F est convexe, décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

I.2 Encadrement de la fonction F

I.2.a Soit n un entier. Comme v_n est non nul, on peut former le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Ainsi,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{4^n n!^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone croissante.}}$

Tous les termes de cette suite sont donc supérieurs au premier terme v_0 qui vaut 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{n!^2}{(2n)!}\,4^n \geqslant 1$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{n!^2} \leqslant \frac{4^n}{(2n)!}}$$